ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Под редакцией доктора педагогических наук,
профессора **Е. Г. Плотниковой**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Л59

***Ответственный редактор*:**

Плотникова Евгения Григорьевна — доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики факультета бизнес-информатики Пермского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Абдуллаев А. Р. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Пермского национально-исследовательского политехнического университета;

Панов В. Ф. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Пермского государственного национального исследовательского университета.

Л59

Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова, Е. Г. Плотникова ; под ред. Е. Г. Плотниковой. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 340 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-5407-4

Учебник подготовлен на основании программ дисциплины «Линейная алгебра» направления «Экономика» и дисциплины «Математика» направления «Менеджмент» подготовки бакалавров и представляет собой полный учебно-методический комплекс, необходимый для изучения дисциплины.

В учебник включены следующие главы: алгебра матриц, системы линейных уравнений, векторная алгебра, линейные операторы, элементы аналитической геометрии. Каждая глава содержит необходимый теоретический материал, иллюстрированный примерами, контрольные вопросы, задания для самостоятельного решения.Отдельный параграф каждой главы посвящен экономическим приложениям рассмотренных математических понятий и методов.

Главной отличительной особенностью учебника является наличие большого объема тестовых заданий. По каждой теме глав учебника представлены тесты трех уровней сложности, по два варианта каждого уровня. Предлагаемые тесты можно использовать для организации как аудиторной, так и внеаудиторной самостоятельной работы студентов, а также для контроля знаний, в том числе автоматизированного. Тестовые задания могут быть использованы преподавателями математических дисциплин для составления других тематических и общих тестов из любого числа заданий различного уровня сложности.

Банк данных тестовых заданий апробирован в ходе многолетней практической деятельности преподавателями кафедры высшей математики НИУ ВШЭ — Пермь и ругих вузов г. Перми.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для бакалавров, магистров, аспирантов экономических и других специальностей и направлений вузов, а также преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9916-5407-4

Оглавление

Авторский коллектив

Плотникова Евгения Григорьевна — доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики факультета бизнес-информатики Пермского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ — Пермь);

Иванов Анатолий Прокопьевич — кандидат физико-математических наук, ординарный профессор, заведующий кафедрой высшей математики факультета бизнес-информатики Пермского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ — Пермь);

Логинова Валерия Валерьевна — старший преподаватель кафедры высшей математики факультета бизнес-информатики Пермского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ — Пермь);

Морозова Алена Витальевна — старший преподаватель кафедры высшей математики факультета бизнес-информатики Пермского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ — Пермь).

Предисловие

Современный компетентностный подход к обучению предполагает практическую направленность изучения математических дисциплин. Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования направлений «Экономика» и «Менеджмент» подготовки бакалавров определено, что обучающиеся в результате изучения дисциплин математического цикла должны знать основные понятия и инструменты математических дисциплин, необходимые для решения экономических задач и принятия управленческих решений; уметь использовать математический аппарат для построения экономических и организационно-управленческих моделей, их теоретического и экспериментального исследования; владеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач, методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов, математическими методами решения типовых организационно-управленческих задач.

Линейная алгебра является базовой дисциплиной математического и научного цикла. В результате освоения этой дисциплины студент должен:

знать

• алгебру матриц;

• методы исследования и решения систем линейных уравнений;

• элементы векторного анализа;

• линейные преобразования и операторы;

• основы аналитической геометрии;

уметь

• выполнять типовые математические задания разделов дисциплины;

• осуществлять выбор методов линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимых для решения экономических задач;

• анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы;

владеть

• навыками применения аппарата линейной алгебры и аналитической геометрии к решению экономических задач.

Данный учебник предназначен в помощь студентам направлений «Экономика» и «Менеджмент» подготовки бакалавров, изучающим линейную алгебру и аналитическую геометрию. Авторы преследовали цель — в простой и наглядной форме изложить основные математические понятия дисциплины, ее методы и подходы к решению задач, а также создать дидактический комплекс заданий для активизации самостоятельной работы студентов.

Главы учебника представляют основные разделы линейной алгебры и аналитической геометрии, а каждый параграф главы — отдельную учебную тему.

В параграфах приводится необходимый теоретический материал, при этом понятия, определения, методы иллюстрируются большим количеством примеров. Отдельный параграф каждой главы посвящается экономическим приложениям рассмотренных понятий и методов. В конце глав содержатся вопросы для повторения и задания для самостоятельного решения, список рекомендуемой литературы. Кроме того, для систематизации знаний, а также для организации самостоятельной работы студентов по каждой главе приведены наборы тематических тестов.

Главной отличительной особенностью наборов тестовых заданий является то, что они полностью охватывают учебные темы дисциплины, а кроме того, все темы представлены тестами трех уровней сложности. При этом тест каждого уровня предлагается в двух вариантах и состоит из 10 или 15 заданий. Задания в вариантах расположены по принципу параллельности, а также по возрастанию уровня сложности.

Новым является используемый подход к построению тестов и выделению уровней сложности. Первый уровень сложности предназначен для отработки базовых математических умений, задания этого уровня, как правило, выполняются в одно действие. Второй уровень содержит более сложные задания, для выполнения которых необходимы несколько действий и знание технологии решения стандартных учебных задач. В тесты третьего уровня включаются нестандартные задания, а также прикладные, профессионально-ориентированные задачи, предполагающие актуализацию полученных знаний и активизацию мыслительной деятельности студентов в процессе их решения. Банк данных тестовых заданий апробирован в ходе многолетней практической деятельности преподавателями кафедры высшей математики Пермского филиала Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и других вузов г. Перми.

В учебник включены следующие главы: алгебра матриц (А. В. Морозова, Е. Г. Плотникова), системы линейных уравнений (А. В. Морозова, Е. Г. Плотникова), векторная алгебра (В. В. Логинова, Е. Г. Плотникова), линейные операторы (А. П. Иванов, Е. Г. Плотникова), элементы аналитической геометрии (В. В. Логинова, Е. Г. Плотникова).

Учебник соответствует учебным программам направлений подготовки бакалавров «Экономика», «Менеджмент», он также будет полезен студентам других направлений, магистрам, аспирантам, изучающим дисциплины «Линейная алгебра» и «Высшая математика», и преподавателям этих дисциплин.

Авторы выражают глубокую благодарность В. Ф. Селезневу и Е. Н. Остапенко за техническую помощь в работе над учебником.

Введение

В середине XVII в. французские математики Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665) создали аналитическую геометрию — раздел математики, в котором геометрические фигуры на координатной плоскости или в координатном пространстве описываются алгебраическими уравнениями, а геометрические задачи решаются алгебраическими методами.

В связи с изучением линейных уравнений как уравнений прямых и плоскостей зарождается линейная алгебра. В дальнейшем необходимость исследования и решения систем линейных уравнений приводит к появлению понятий определителя и матрицы, разрабатываются теория определителей и алгебра матриц. В конце XIX в. построение общей теории систем линейных уравнений было завершено.

В XX в. центральное положение в линейной алгебре занимают понятия векторных пространств и связанных с ними линейных преобразований (операторов), разрабатываются также понятия линейных, билинейных и квадратичных форм.

В настоящее время методы линейной алгебры широко применяются при построении моделей изучаемых явлений и решении самых разнообразных практических задач. Линейная алгебра является основой современных численных методов, аппарат линейной алгебры позволяет в компактной форме представлять фундаментальные законы различной природы (физической, экономической и т.п.). Таким образом, линейная алгебра является наиболее важной с точки зрения приложений частью алгебры, изучающей объекты линейной природы: системы линейных уравнений, векторные (линейные) пространства, линейные отображения (операторы), линейные, билинейные и квадратичные формы. Кроме того, линейная алгебра является аппаратом изучения аналитической геометрии.

Глава 1
АЛГЕБРА МАТРИЦ

При решении многих практических, в том числе экономических, задач используются матрицы как наиболее удобный способ хранения, передачи и обработки информации. Данная глава представляет алгебру матриц, в результате изучения которой обучаемые должны:

знать
- определение и виды матриц;
- действия над матрицами и их свойства;
- определение, вычисление и свойства определителей, теорему Лапласа;
- определение, вычисление и свойства обратной матрицы;
- определение и свойства ранга матрицы;

уметь
- определять характеристики матриц;
- выполнять действия над матрицами;
- вычислять значение многочлена от матрицы;
- определять взаимообратные матрицы;
- вычислять определители любого порядка;
- выполнять элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы;
- находить ранг матрицы;

владеть
- методикой определения перестановочных матриц;
- методикой определения присоединенной матрицы;
- методикой разложения определителя по строке (столбцу);
- навыками вычисления определителей с использованием их свойств;
- алгоритмами нахождения обратной матрицы;
- алгоритмами нахождения ранга матрицы;
- навыками использования алгебры матриц в решении экономических задач.

1.1. Матрицы

1.1.1. Определение и виды матриц

Прямоугольная таблица вида

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или в сокращенной записи $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, называется *матрицей* размерности $m \times n$ (m — количество строк, n — количество столбцов), где a_{ij} — *элементы* матрицы ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$). Традиционно матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, C, ..., при этом индексы, указывающие на размерность матрицы ($m \times n$), могут быть прописаны, а могут опускаться. Элементы матрицы обозначаются соответствующими строчными буквами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ... Индексы указывают на положение элемента в матрице: i — номер строки, j — номер столбца, на пересечении которых расположен элемент. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ содержит две строки и три столбца, следовательно, ее размерность 2×3. Элемент этой матрицы $a_{23} = -2$.

Определим основные виды матриц.

Две матрицы $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ одинаковой размерности называются *равными*, если совпадают их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$.

Если количество строк совпадает с количеством столбцов, то матрица

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *квадратной порядка n*.

Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ — *побочную диагональ*. Так, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ — квадратная 3-го порядка. Ее главную диагональ образуют числа 2, 4, 2, а побочную — 0, 4, −1.

Матрица называется *нулевой* (обозначается обычно O), если все ее элементы нулевые.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица E называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны единице. Пример:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ называется *симметричной*, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следом квадратной матрицы $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ является число trA, полученное путем сложения всех элементов матрицы A, стоящих по главной диагонали: $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$. Например, след матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ равен $trA =$ $= 2 + 0 = 2$.

Квадратные матрицы, все элементы которых ниже или выше главной диагонали равны нулю, называются *треугольными*. Различают *верхнетреугольные* и *нижнетреугольные* матрицы. Так, матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

является *верхнетреугольной*.

Прямоугольная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2m} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mm} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *квазитреугольной* (ступенчатой или трапециевидной).

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой* или *строчной матрицей*: $A = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; ... \;\; a_{1n})$.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом* или *столбцевой матрицей*: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

1.1.2. Операции над матрицами

Над матрицами выполняются следующие операции: сложения, вычитания, умножения на число, транспонирования. Определим каждую операцию из перечисленных.

1. *Умножение матрицы на число*. Результатом умножения матрицы $A =$ $= [a_{ij}]_{m \times n}$ на действительное число λ является матрица $B_{m \times n} = \lambda \cdot A_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},\; i = 1, 2, ..., m;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Например, $-5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cdot 2 & -5\cdot(-3) \\ -5\cdot 4 & -5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание 1.1. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за ее знак.

2. *Сумма матриц*. Суммой матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ является матрица $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\; i = 1, 2, ..., m;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -3+1 & 4+6 \\ 0+2 & 1+(-1) & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 10 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. *Вычитание матриц.* Результатом вычитания из матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ является матрица $C_{m \times n} = A_{m \times n} - B_{m \times n} = A_{m \times n} + (-1) \cdot B_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -3-1 & 4-6 \\ 0-2 & 1-(-1) & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.2. Операции сложения и вычитания определены для матриц одинаковой размерности.

4. *Произведение матриц.* Результатом произведения матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times k}$ на матрицу $B = [b_{ij}]_{k \times n}$ называется такая матрица $C_{m \times n} = A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$ (символ умножения можно опускать и писать AB), каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj},\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено (*матрица A согласована с матрицей B*), если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$

Замечание 1.3. Если произведение $A \cdot B$ существует, то произведение $B \cdot A$ может не существовать в силу несогласованности матриц.

Квадратные матрицы A и B называются *перестановочными*, или *коммутативными*, если $AB = BA$.

Квадратные матрицы A и B одинаковых размерностей называются *взаимообратными*, если $AB = BA = E$.

Возведением квадратной матрицы A в целую положительную степень m ($m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$) является матрица $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{m \text{ раз}}$.

5. *Транспонированной* матрицей к матрице $A_{m \times n}$ является матрица A^T размерности $n \times m$, которая получена из матрицы A путем замены строк столбцами с сохранением их порядка: $A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$, $i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами, которые можно доказать по определениям:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
4) $A(B + C) = AB + AC$;
5) $(A + B)C = AC + BC$;
6) $C(AB) = (CA)B$;

7) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
8) $(A^T)^T = A$;
9) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
10) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
11) $(AB)^T = B^T A^T$.

Продемонстрируем дополнительно на примерах выполнение операций над матрицами.

Пример 1.1. Для матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ найдем $4B - 7A$, A^T, $2A - 3B^T$.

Решение

1. $4B-7A=4\cdot\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-7\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot(-5)-7\cdot 2 & 4\cdot 6-7\cdot 3 \\ 4\cdot 7-7\cdot 0 & 4\cdot 0-7\cdot 4 \\ 4\cdot(-2)-7\cdot(-4) & 4\cdot 1-7\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -34 & 3 \\ 28 & -28 \\ 20 & -59 \end{pmatrix}$.

2. $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Операция $2A - 3B^T$ невозможна, так как матрица $2A$ имеет размерность 3×2, матрица $3B^T$ имеет размерность 2×3, а операция вычитания матриц возможна только для матриц одинаковых размерностей.

Пример 1.2. Для матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ найдем AB, B^TA, A^TB^T, AA^T, A^2, $tr(AB^T)$.

Решение

1. Операция AB невозможна, поскольку матрица $A_{3\times 2}$ несогласована с матрицей $B_{3\times 2}$, так как число столбцов матрицы A (два столбца) не равно числу строк матрицы B (три строки).

2. Операция B^TA возможна, поскольку матрица $B^T_{2\times 3}$ согласована с матрицей $A_{3\times 2}$, $B^T_{2\times 3}\cdot A_{3\times 2} = C_{2\times 2}$:

$$B^TA=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 7 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (-5)\cdot 2+7\cdot 0+(-2)\cdot(-4) & (-5)\cdot 3+7\cdot 4+(-2)\cdot 9 \\ 6\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot(-4) & 6\cdot 3+0\cdot 4+1\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}.$$

3. Операция A^TB^T невозможна, поскольку матрица $A^T_{2\times 3}$ несогласована с матрицей $B^T_{2\times 3}$.

4. Операция AA^T возможна, поскольку матрица $A_{3\times 2}$ согласована с матрицей $A^T_{2\times 3}$:

$$A_{3\times 2}\cdot A^T_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot 0+3\cdot 4 & 2\cdot(-4)+3\cdot 9 \\ 0\cdot 2+4\cdot 3 & 0\cdot 0+4\cdot 4 & 0\cdot(-4)+4\cdot 9 \\ (-4)\cdot 2+9\cdot 3 & (-4)\cdot 0+9\cdot 4 & (-4)\cdot(-4)+9\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 12 & 19 \\ 12 & 16 & 36 \\ 19 & 36 & 97 \end{pmatrix}.$$

5. Операция A^2 невозможна, поскольку матрица $A_{3\times 2}$ не является квадратной.

6. Нахождение $tr(AB^T)$ возможно, так как произведение AB^T существует, поскольку матрица $A_{3\times 2}$ согласована с матрицей $B^T_{2\times 3}$:

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-5)+3\cdot 6 & 2\cdot 7+3\cdot 0 & 2\cdot(-2)+3\cdot 1 \\ 0\cdot(-5)+4\cdot 6 & 0\cdot 7+4\cdot 0 & 0\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ (-4)\cdot(-5)+9\cdot 6 & (-4)\cdot 7+9\cdot 0 & (-4)\cdot(-2)+9\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 & -1 \\ 24 & 0 & 4 \\ 74 & -28 & 17 \end{pmatrix},$$

тогда $tr(AB^T) = 8 + 0 + 17 = 25$.

Пример 1.3. Найдем все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Запишем общий вид всех перестановочных матриц: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Применим определение перестановочных матриц $AB = BA$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+3b \\ c & -2c+3d \end{pmatrix}.$$

Получаем $\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+3b \\ c & -2c+3d \end{pmatrix}$.

По определению равных матриц имеем

$$\begin{cases} a-2c = a, \\ b-2d = -2a+3b, \\ 3c = c, \\ 3d = -2c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ b = a-d, \\ c = 0, \\ d \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда общий вид всех перестановочных матриц $B = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Выполним проверку (по определению перестановочных матриц):

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+d \\ 0 & 3d \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+d \\ 0 & 3d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = BA.$$

Пример 1.4. Проверим, являются ли матрицы взаимообратными:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

Воспользуемся определением взаимообратных матриц $AB = BA = E$:

$$1)\ \left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ AB = BA = E,$$

матрицы A и B являются взаимообратными;

$$2)\ \left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq E \\ BA &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \neq E \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ AB \neq BA \neq E,$$

матрицы A и B не являются взаимообратными.

Операции над матрицами используются при построении и решении *матричных уравнений*, в которых участвуют как известные, так и неизвестные матрицы.

Пример 1.5. Решим уравнение $2A = 3B - 4X$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Выразим матрицу X и подставим данные матрицы в уравнение:

$$X = \frac{1}{4}(3B - 2A) = \frac{1}{4}\cdot\left[3\cdot\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 21 & -8 \\ 2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{4} & 3 \\ \frac{21}{4} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{15}{4} \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами позволяют составлять *многочлен от матрицы*, представляющий собой матрицу, полученную в результате подстановки данной матрицы вместо переменной x в обычный алгебраический многочлен степени n:

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n, \text{ где } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Пример 1.6. Вычислим значение многочлена $P(x) = -3x^2 + 5x - 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Подставим вместо переменной x матрицу A и выполним необходимые действия:

$$P(A) = -3A^2 + 5A - 2E = -3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители

1.2.1. Формулы для вычисления определителей

Каждой квадратной матрице A соответствует число, называемое ее *определителем* (*детерминантом*). Это число представляется в виде таблицы, соответствующей матрице, вычисляется по определенному правилу и обозначается $\Delta = \det A = |A|$.

Квадратная матрица называется *вырожденной* (*особенной*), если ее определитель равен нулю ($\det A = 0$).

Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной*), если ее определитель отличен от нуля ($\det A \neq 0$).

Определителем 1-го порядка для матрицы $A = (a_{11})$ является число $\det A = a_{11}$.

Пример 1.7. Вычислим определители матриц $A = (17)$, $B = (-2014)$, $C = (a)$.

Решение

$\det A = 17$, $\det B = -2014$, $\det C = a$.

Определителем 2-го порядка для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является число $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, вычисляемое по формуле

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{1.1}$$

Пример 1.8. Вычислим определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение

Воспользуемся формулой (1.1):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-4) = 6 - 4 = 2;$$

$$\det B = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - (-\sin\alpha) \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha = \cos(\alpha - 2\alpha) = \cos\alpha.$$

Определителем 3-го порядка для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ является число $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, вычисляемое по формуле

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{33}a_{21}. \tag{1.2}$$

Для удобства запоминания формулы (1.2) и упрощения вычислений можно использовать мнемонические правила Саррюса.

1. *Правило треугольников.* Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов, расположенных на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали, минус сумма произведений элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали:

$$\det A = \text{сумма}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{сумма}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(соединенные линиями элементы перемножаются).

2. *Правило диагоналей.* Второй, эквивалентный первому, способ вычисления заключается в том, что к таблице элементов исходного определителя последовательно дописываются справа ее первый и второй столбцы. Тогда определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов расширенной таблицы, расположенных на трех ее главных диагоналях, минус сумма произведений элементов, расположенных на трех побочных диагоналях:

$$\det A = \text{сумма}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \text{сумма}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(соединенные линиями элементы перемножаются).

Пример 1.9. Вычислим определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Решение

Воспользуемся формулой (1.2):

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot(-2) + (-3)\cdot 2\cdot(-4) - 3\cdot 0\cdot(-3) - 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-1)\cdot 2\cdot 4 = 0;$$

$$\det B = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= a\cdot a\cdot a + 2\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot a\cdot 2 - a\cdot 0\cdot(-1) - a\cdot(-1)\cdot 0 = a^3 - 4a.$$

Правила Саррюса применяются только для определителей 3-го порядка. Для рассмотрения практического способа вычисления определителей любого порядка необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель $(n - 1)$-го порядка, полученный из определителя матрицы после вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен элемент.

Пример 1.10. Вычислим миноры M_{11} и M_{12} для матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -4\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Решение

1. В матрице A вычеркиваем первую строку и первый столбец:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = |7| = 7;$$

вычеркиваем первую строку и второй столбец:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = |0| = 0.$$

2. Аналогично для матрицы B:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -4\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix}0 & -4\\ -2 & -1\end{vmatrix} = -8;$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -4\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix}4 & -4\\ -3 & -1\end{vmatrix} = -16.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется число, равное значению минора M_{ij} элемента, взятого со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.3}$$

Пример 1.11. Вычислим $A_{21} + A_{32}$ для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -4\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Решение

Воспользуемся формулой (1.3):

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix} = -[2\cdot(-1) - (-2)\cdot 3] = -4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -4\end{vmatrix} = -[1\cdot(-4) - 4\cdot 3] = 16.$$

Тогда $A_{21} + A_{32} = -4 + 16 = 12$.

Каждый элемент a_{ij} матрицы A n-го порядка имеет алгебраическое дополнение A_{ij}. Матрица A^{+}, элементами которой a_{ij}^{+} являются алгебраические дополнения элементов a_{ji} матрицы A (иначе, элементов матрицы A^T), называется *присоединенной*, т.е. $a_{ij}^{+} = A_{ji}$.

Алгоритм нахождения присоединенной матрицы

1. По формуле (1.3) вычислить алгебраические дополнения элементов матрицы A и составить из них матрицу $[A_{ij}]$.

2. Найти присоединенную матрицу A^{+}, транспонируя матрицу $[A_{ij}]$, т.е. $A^{+} = [A_{ij}]^T$.

Пример 1.12. Составим присоединенную матрицу A^+, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда $[A_{ij}] = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$, $A^+ = [A_{ij}]^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -11 & 2 & -8 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Определение определителя n-го порядка представлено следующей теоремой.

Теорема 1.1 (Лапласа). ***Определителем n-го порядка*** *для матрицы A размерности $n \times n$ является действительное число, равное сумме произведений всех миноров k-го порядка, расположенных в произвольно выбранных k строках или k столбцах*, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, *на их алгебраические дополнения.*

Пример 1.13. Используя теорему Лапласа, вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Выберем, например, 1-ю и 2-ю строки ($k = 2$). Построим все миноры 2-го порядка по выбранным строкам.

Первый минор — это определитель 2-го порядка, построенный по элементам, стоящим на пересечении 1-й и 2-й строк и 1-го и 2-го столбцов: $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Второй минор — это определитель 2-го порядка, построенный по элементам, стоящим на пересечении 1-й и 2-й строк и 1-го и 3-го столбцов: $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Третий минор (1-я и 2-я строки и 1-й и 4-й столбцы): $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$.

Аналогично получим еще три минора:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Для каждого из шести построенных миноров найдем алгебраические дополнения, которые будем вычислять по формуле $A_{i_1 i_2 j_1 j_2} = (-1)^{i_1 + i_2 + j_1 + j_2} \cdot M_{i_1 i_2 j_1 j_2}$, где i_1 и i_2 — номера строк, j_1 и j_2 — номера столбцов, по которым был составлен соответствующий минор; $M_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ — минор (определитель 2-го порядка), составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания i_1-й и i_2-й строк и j_1-го и j_2-го столбцов.