МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. З. Ильязова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлениям
230400.62 и 080100.62

Ульяновск
УлГТУ
2012

УДК 512.64 (075)
ББК 22.143я7
И49

Рецензенты:

Доцент кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВПО Ульяновского государственного педагогического университета имени И. Н. Ульянова, кандидат физико-математических наук, доцент Г. С. Прокопьев,

доцент кафедры «Математика и физика» ФГБОУ ВПО «Ульяновская ГСХА» имени П. А. Столыпина, кандидат физико-математических наук, доцент Т. А. Джабраилов

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Ильязова, Д. З.

И49 Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Теория и практика: учебное пособие / Д. З. Ильязова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 171 с.

ISBN 978-5-9795-1064-4

Учебное пособие «Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Теория и практика» содержит следующие разделы ФГОС ВПО по математике и линейной алгебре: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия. Отличительной особенностью пособия является то, что весь учебно-методический материал разделён на главы, соответствующие одной теме программы. Каждая глава содержит теорию с примерами её иллюстрирующую; задачи с ответами; тест и типовой расчёт с образцом решений задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 230400.62, 080100.62, а также для студентов технических и экономических вузов; для преподавателей.

УДК 512.64 (075)
ББК 22.143я7

ISBN 978-5-9795-1064-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС ВПО). Оно содержит учебно-методические материалы по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия. Указанные разделы согласно требованиям ФГОС ВПО входят в учебные программы по дисциплинам «Математика» для инженерных, технологических и других нематематических специальностей и «Линейная алгебра» для экономических специальностей вузов.

Современный процесс обучения математике требует не только новые методики, но и создание соответствующей учебной литературы.

Целью написания данного пособия является разработка современной учебно-методической литературы нового поколения, которая предполагает использование дифференцированного подхода к обучению студентов с различным уровнем математической подготовки. Данное пособие будет полезно для преподавателей и студентов вузов.

Структура пособия следующая. Весь материал разделён на главы и параграфы. В каждой главе в параграфах изложена теория, которая для удобства её использования разбита на пункты. В каждом пункте приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию. В главах после изложения теории приводятся задачи различного характера и трудности для решения на практическом занятии и для домашнего задания. Большая часть задач снабжена ответами, которые приводятся после условий всех задач.

Для оценки уровня знаний студентов в каждой главе предлагаются тестовые задания и типовые расчёты (индивидуальные задания) с образцами их решения.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и действия над ними

1.1.1. Основные сведения о матрицах

Всякая прямоугольная таблица из mn чисел (или иных объектов), расположенных в m её строках и n её столбцах, называется матрицей размера $m \times n$ (m на n). Числа, из которых она состоит, называются её элементами.

Обозначения: $A, B, C, \ldots$ − матрицы,

a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij}, \ldots$ − элементы матриц, где i − номер строки, j − номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Запись: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

короткая запись: $A=(a_{ij})_{m,n}$, или $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матрица, у которой число строк m равно числу столбцов n, называется квадратной n-го порядка. Совокупность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами называется главной диагональю.

Матрицы A и B называются равными, если у них равны соответствующие элементы: $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной.

Диагональная матрица E, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной.

Квадратная матрица, у которой все элементы выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется нижне (верхне)треугольной.

Матрица O, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой.

Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется матрицей − строкой (столбцом) или вектором − строкой (столбцом).

Примеры 1.1. 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ − матрица размера 3×4,

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ − квадратная матрица 2-го порядка,

3) $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ − нулевая матрица размера 3×2,

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ − диагональная матрица 3-го порядка,

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ − единичная матрица 3-го порядка,

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ − нижнетреугольная матрица 3-го порядка,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ − верхнетреугольная матрица 3-го порядка,

8) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ − матрица - столбец,

9) $(-2\ 0\ 4\ 5)$ − матрица - строка.

1.1.2. Ступенчатая матрица. Элементарные эквивалентные преобразования матрицы

Ведущим элементом (лидером) строки, матрицы называется первый её ненулевой элемент.

Ступенчатой матрицей называется матрица, удовлетворяющая двум условиям:

1) все нулевые строчки расположены ниже ненулевых,
2) в каждой строке лидер расположен правее лидера предыдущей строки.

Нулевая матрица по определению является ступенчатой.

Примеры 1.2.

1) В матрице $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ лидер первой строки 2; второй − 5; третьей − 1.

2) Матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатые.

3) Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ не является ступенчатой.

4) Ступенчатыми матрицами являются: диагональная матрица, единичная матрица, верхнетреугольные матрицы.

Элементарными (эквивалентными) преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) перестановка местами двух строк матрицы,
2) умножение строки матрицы на число, не равное нулю,
3) умножение строки матрицы на число и прибавление к другой строке,
4) вычёркивание (вписывание) строки из нулей.

Аналогичные преобразования можно производить и над столбцами матрицы.

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Пример 1.3. Привести матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 1 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 1 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ + \end{matrix} \sim$$

умножим элементы 1-й строки на (-1) и прибавим её к 3-й строке матрицы;

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 3 \\ \times 4 \end{matrix} \sim$$

умножим элементы 2-й строки на 3, 3−й на 4 и прибавим вновь полученную строку к 3-й.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 27 & -25 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу

1.1.3. Действия над матрицами

Суммой матриц $A=(a_{ij})_{m,n}$ и $B=(b_{ij})_{m,n}$ называется матрица $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m,n}$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m,n}$ на число λ называется матрица $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m,n}$.

Произведением матриц $A=(a_{il})_{m,k}$ и $B=(a_{kj})_{k,n}$ называется матрица $C=AB=(c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\ldots+a_{il}\,b_{lj}$.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $A+B=B+A;$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C;$
3. $A+0=A;$
4. $A-A=0;$
5. $1\cdot A=A;$
6. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B;$
7. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A;$
8. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A);$
9. $A(BC)=(AB)C;$
10. $A(B+C)=AB+AC;$
11. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B);$
12. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A;$
13. если $A_{n,n}$ и $E_{n,n}$, то $AE=EA=A$.

Здесь предполагается, что левые части равенств 1−12 имеют смысл; тогда будут иметь смысл и правые части, причём выполняются написанные равенства.

Заметим, что произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т. е. $AB\neq BA$.

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой строк соответствующими столбцами, называется транспонированной матрице A.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T=A;$
2) $(\alpha A)^T=\alpha A^T;$
3) $(A+B)^T=A^T+B^T;$
4) $(AB)^T=B^T\cdot A^T.$

Пример 1.4.

1) Найти матрицу $-2A+3B^T$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

Решение.

Найдём матрицу B^T, транспонированную к матрице B: $B^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдём матрицы $-2A$ и $-3B^T$, умножив все элементы матрицы A, на (-2) матрицы B^T на 3, а затем найдём сумму матриц $-2A$ и $3B^T$ (поэлементно):

$$-2A+3B^T=-2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 12 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & 10 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}.$$

2) Найти произведение матриц A и B, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Произведение матриц $B_{2\times3}A_{2\times2}$не существует, а произведение матриц $A_{2\times2}\ B_{2\times3}$ существует. Найдём произведение $AB=C_{2\times3}$

$$C=AB=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2\cdot3+0\cdot2 & -2\cdot5+0\cdot4 & -2\cdot0+0\cdot(-3) \\ 1\cdot3+(-4)\cdot2 & 5\cdot1+(-4)\cdot4 & 1\cdot0+(-4)\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -10 & 0 \\ -5 & -11 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители

1.2.1. Основные понятия

Любой квадратной матрице A n-го порядка, элементами которой являются числа, можно сопоставить число, называемое определителем (детерминантом).

Обозначение: $|A|$ или $detA$.

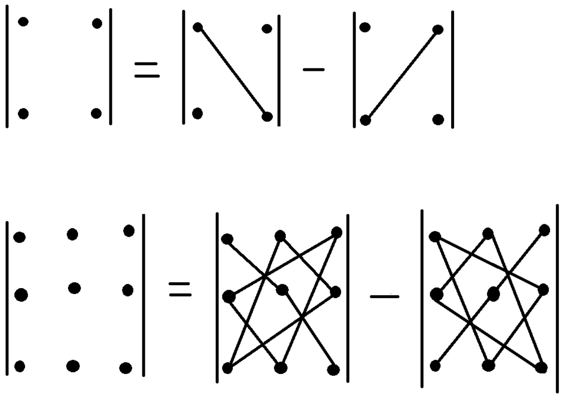
<u>Определителем матрицы</u> $A=(a)$ <u>первого порядка</u> называется число $|A|=a$.

<u>Определителем матрицы</u> $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ <u>второго порядка</u> называется число $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

<u>Определителем матрицы</u> $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ <u>третьего порядка</u>

называется число $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{32}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-$ $-a_{11}a_{23}a_{32}.$

Схема вычислений определителя второго и третьего порядка:



Правило вычисления определителя третьего порядка называют правилом треугольников, или правилом Саррюса.

Примеры 1.5.

Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$.

Решение.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4 = 5.$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-4) \cdot (-8) + 1 \cdot 5 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \times$
$\times\ (-4) \cdot (-6) - 1 \cdot 3 \cdot (-8) - 0 \cdot 5 \cdot 7 = 144.$

1.2.2. Определитель матрицы n-го порядка

Пусть матрица A–матрица n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Минором M_{ij} элемента a_{ij}</u> матрицы A n-го порядка называется определитель, получаемый из определителя $|A|$ вычёркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Из определения следует, что минор M_{ij} – определитель, порядок которого на единицу меньше, чем у определителя $|A|$, т. е. порядок M_{ij} равен $n-1$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется минор M_{ij} элемента a_{ij}, взятый по знаком $(-1)^{i+j}$:

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример 1.6.

Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{21} и a_{23} матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$.

Решение.

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -8 - 14 = -22; A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1) \times$
$\times (-22) = 22;$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3;\ A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = -3.$

Предположим, что определители матриц, порядок которых меньше, чем n, введены.

Определителем квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ n-го порядка называется число $|A|$, вычисляемое по формуле

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n.} \quad (1.1)$$

Формулу (1.1) называют разложением определителя $|A|$ по элементам 1-й строки.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема. Определитель квадратной матрицы $A=(a_{ij})n$-го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}, \quad (1.2)$$

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}. \quad (1.3)$$

Формула (1.2) – разложение определителя $|A|$ по элементам i-й строки, а (1.3) – по элементам j-го столбца.

Пример 1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$, используя формулы (1.2) и (1.3).

Решение.

1) Разложим определитель по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 1A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} + 2 \times$$

$$\times (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 54 + 90 = 144.$$

2) Вычислим определитель по формуле (3), разложив его по элементам 2-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} - 4 \cdot A_{22} + 7 \cdot A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} -$$

$$-7 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 54 + 48 + 42 = 144.$$

1.2.3. Свойства определителей

1. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

2. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

3. Определители данной матрицы $A=(a_{ij})$ и транспонированной ей $A^T=(a_{ji})$ равны: $|A|=|A^T|$.

Из свойства 3 следует, что строки и столбцы в определителе равноправны. Далее будем формулировать свойства для строк.

4. При перестановке двух строк определитель меняет знак.

5. Общий множитель всех элементов одной строки можно выносить за знак определителя.

6. Определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю.

7. Если в определителе каждый элемент какой-нибудь строки представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух соответствующих слагаемых.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & a_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

8. Определитель, имеющий строку из нулей, равен нулю.

9. Если в определителе соответствующие элементы двух строк пропорциональны, то он равен нулю.

10. Величина определителя не изменится, если к элементам одной

строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

11. («Фальшивое разложение определителя»). Сумма произведений элементов какой-нибудь строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Следствие.

Если какая-нибудь строка определителя – линейная комбинация других строк, то определитель равен нулю.

12. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц.

Замечание. Свойство 10 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1.8.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \times 2,\ (-3),\ (-4) \\ + \\ + \end{matrix} =$$

прибавим к элементам первой строки элементы второй строки, умноженные на 2, к элементам третьей строки – элементы второй строки, умноженные на (− 3), а к элементам четвертой строки – элементы второй строки, умноженные на (– 4)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

разложим определитель по элементам первого столбца:

$$= 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{21} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -11 & -1 & 0 \\ -65 & -29 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 65 & 29 \end{vmatrix} = -(319 - 65) = -254.$$

1.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка.

Матрица B называется обратной матрице A, если $AB=BA=E$.

Матрица A называется обратимой, если для неё есть обратная.

Теорема. Если матрица A – обратимая, то для неё существует единственная ей обратная матрица.

Матрицу, обратную матрице A, будем обозначать A^{-1}.

Матрица A называется невырожденной, если определитель $|A|$ не равен нулю.

Теорема (критерий обратимости матрицы).

Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.

Доказательство.

1. Пусть A – обратимая матрица. Докажем, что она невырожденная, т. е., что $|A|\neq 0$.

A – обратимая матрица. Тогда существует A^{-1} такая, что $A\cdot A^{-1}= A^{-1}A=E$. Отсюда имеем, например, $|A\cdot A^{-1}|=|E|$ или $|A||A^{-1}|=1$. Следовательно, $|A|\neq 0$.

2. Пусть матрица A – невырожденная. Докажем, что она обратимая, т. е. существует матрица A^{-1}.

Введём в рассмотрение матрицу:

$B=\begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ A_{1n} A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$,где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Покажем, что матрица$\frac{1}{|A|}B=A^{-1}$, т. е., что $A=A\frac{1}{|A|}B=\frac{1}{|A|}BA=E$.

Вычислим, например, $\frac{1}{|A|}BA=E$. Имеем:

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ A_{1n} A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + \dots + a_{n1}A_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12}A_{12} + \dots + a_{n2}A_{n2} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1n}A_{1n} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, $\frac{1}{|A|}B = A$. (При вычислениях использовались теорема о разложении определителя по элементам столбца и свойство «о фальшивом разложении определителя»).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует способ вычисления матрицы A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.4)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Пример 1.9.

Найти обратную матрицу A^{-1},если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} = 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -4 \neq 0.$ Следовательно, матрица A – обратимая.

Найдём матрицу A^{-1}. Воспользуемся формулой, которая в нашем случае имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Найдём все алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$,

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6,$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6,$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

Итак, имеем $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Проверка: вычислим $A^{-1}A$:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично, $A \cdot A^{-1} = E$.

Таким образом, матрица A^{-1} найдена верно.

1.4. Ранг матрицы и способы его нахождения

1.4.1. Минор матрицы. Метод окаймляющих миноров

Пусть A – матрицы размера $m \times n$. Выделим в матрице какие-нибудь k строк и k столбцов ($1=k\leq\min\{m,n\}$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Он называется минором k-го порядка данной матрицы A.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля её миноров.

Обозначения: *rang A* или r_A.

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Пример 1.10.

Найти ранг матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

В матрице A имеются отличные от нуля миноры 2-го порядка, например, $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Выясним, имеются ли отличные от нуля миноры 3-го порядка.

Вычислим все миноры 3-го порядка, которые можно образовать из матрицы A вычёркиванием одного столбца:

$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$, так как 2-й столбец из нулей.

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры 3-го порядка равны нулю, то *rang A*=2.

Вычисление ранга матрицы по определению связано с подсчётом большого числа определителей. Поэтому при вычислении ранга матрицы используют один из двух методов: метод окаймляющих миноров или метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров.

В основе метода окаймляющих миноров лежит следующая теорема

Теорема (метод окаймляющих миноров).

Если в матрице какой-нибудь минор порядка r неравен нулю, а все миноры порядка r+1, его содержащие, равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Пример 1.11. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Так как матрица A не является нулевой, то *rang A*≥1. В матрице A имеется минор порядка 2, отличный от нуля, например, $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 5 \neq 0$. Следовательно, *rang A*≥2. Подсчитаем все возможные миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2^{(1)}$. Их два:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2),(-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2),(-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры минора $M_2^{(1)}$ равны нулю. Значит, *rang A*=2.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется <u>базисным.</u>

В примере 1.11 базисный минор $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Заметим, что у матрицы может быть несколько базисных миноров.

1.4.2. Метод элементарных преобразований

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях). Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы). Ранг матрицы равен рангу ей эквивалентной ступенчатой матрицы.

Пример 1.12.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2),(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк равно 2, следовательно, *rang A*=2.

1.5. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными

1.5.1. Основные понятия

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \qquad (1.5)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются неизвестными; $a_{11}, a_{21}, a_{13} \dots, a_{mn}$ – коэффициентами; $b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободными членами.

Систему линейных уравнений (1.5) можно записать в матричной форме
$$AX=B, \qquad (1.6)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (1.7)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. Здесь A – матрица системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов.

С системой линейных уравнений (1.5) связана ещё одна матрица $\tilde{A}$, полученная из матриц A добавлением столбца B свободных членов, и называемая расширенной матрицей системы (1.5):
$$\widetilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (1.8)$$

Если в системе линейных уравнений (1.5) все свободные члены равны нулю (т. е. B – нулевая матрица-столбец), то она называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Решением системы линейных уравнение называется упорядоченная совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которая при подстановке в систему обращает каждое уравнение в тождество.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае – несовместной.

Две системы линейных уравнений называются равносильными (эквивалентными), если равны множества их решений.

1.5.2. Решение системы методом обратной матрицы

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, у которой матрица A системы – невырожденная, т. е. $|A|\neq 0$. Запишем систему в матричной форме: $AX=B$.

Так как $|A|\neq 0$, то существует матрица A^{-1}. Умножим слева обе части матричного уравнения на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$ или

$$X = A^{-1}B. \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) – матричная форма записи решения системы (1.5). Для того чтобы найти элементы матрицы X неизвестных, нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить её на столбец свободных членов B.

Пример 1.13.

Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли матрица A системы невырожденной:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ (-2) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A является невырожденной. Поэтому существует обратная матрица A^{-1}; воспользуемся формулой (1.4):

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, A_{11}=-13, A_{21}=2, A_{31}=5, A_{12}=-6, A_{22}=4, A_{32}=0, A_{13}=17, A_{23}=-8, A_{33}=-5.

Итак, $A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 0 \\ 17 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Найдём произведение $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 0 \\ 17 & -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица неизвестных равна:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{5}{2}$, x_2=1, x_3=$\frac{7}{2}$.

Ответ можно записать также в виде $\left\{\left(\frac{5}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)\right\}$.

1.5.3. Решение системы методом Крамера

Система n линейных уравнений с n неизвестными называется крамеровской, если матрица A системы является невырожденной (т. е. $|A|\neq 0$).

Теорема (Крамера). Крамеровская система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое находится по формулам: $x_2 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$, (1.10)

где $|A|$ − определитель матрицы системы, $|A_{ij}|$ − определитель матрицы, получаемый из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов B.

Доказательство.

Так как $|A|\neq 0$, то, как было показано выше, матричная форма записи решения системы имеет вид $X=A^{-1}B$. Развернём это матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Суммы $A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n$ (j=1,2,…,n) представляют собой произведение чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов j-го столбца. Они равны определителям матриц, полученных из матрицы A

заменой элементов j-го столбца на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Следовательно, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{A} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \ldots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix}$.

Отсюда имеем: $x_1=\frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2=\frac{|A_2|}{|A|}$,…, $x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$.

Теорема доказана.

Заметим, что способ решения системы линейных уравнений, основанный на формулах (1.10) Крамера, называют методом или правилом Крамера.

Пример 1.14.

Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Данная система линейных уравнений является крамеровской (так как $|A| \neq 0$). Согласно формулам (10) имеем:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-25}{-10} = \frac{5}{2},$$

$$x_1 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-10} = 1,$$

$$x_1 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{-10} = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)\right\}$.

Замечание. Метод обратной матрицы и метод Крамера решения систем линейных уравнений становятся трудоёмкими при $n \geq 4$. Они удобны при решении на компьютере.

1.5.4. Решение системы уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса (методом последовательного исключения неизвестных) можно решить любую систему линейных уравнений. Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) систему с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (её расширенная матрица − ступенчатая). На втором этапе (обратный ход) из ступенчатой системы последовательно, начиная с последнего уравнения, определяются значения неизвестных.

Эквивалентными (равносильными) преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие действия:

1) перестановка местами двух уравнений системы,
2) умножение любого уравнения на число, отличное от нуля,
3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на любое число,
4) удаление (вписывание) уравнения вида $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0$.

На практике проделывают эквивалентные преобразования не над системой, а над её расширенной матрицей.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса.

Пример 1.15.

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad -x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу $\tilde{A}$ и с помощью эквивалентных преобразований приведем её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

1-ю строку прибавим к 3-й, а затем умножим её на (-1) и прибавим к 4-й.

В дальнейшем 1-ю строку не трогаем, работаем со 2-й строкой.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & -1 \end{array}\right)\sim$$

Прибавим 2-ю строку к 3-й, а затем прибавим утроенную 2-ю строку к 4-й.

Далее первые две строки не трогаем, работаем с 3-й.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 20 \end{array}\right)\sim$$

Умножим 3-ю строку на 7 и прибавим к 4-й .

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}\right)$$ – ступенчатая матрица.

Таким образом, в результате проведённых преобразований пришли к следующей системе линейных уравнений, равносильной данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ 17x_4 = 34. \end{cases}$$

Полученная система (значит, и данная) имеет единственное решение.

Из последнего уравнения $x_4 = 2$; из третьего $x_3 = 2 - 2x_4 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$, т. е. $x_3 = -2$; из второго $x_2 = -7 - x_3 + 2x_4 = -7 - (-2) + 2 \cdot 2 = -1$, т. е. $x_2 = -1$; из первого $x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 + (-1) - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1$, т. е. $x_1 = 1$.

Ответ: $\{(1; -1; -2; 2)\}$.

1.6. Решение систем m линейных уравнений с n неизвестными

1.6.1. Критерий совместности системы линейных уравнений

Вычисление ранга матрицы редко является самоцелью. Ранг матрицы – одно из важнейших понятий линейной алгебры и используется во многих вопросах, например, им пользуются при исследовании и решении систем линейных уравнений.

Пусть A – матрица системы, а $\tilde{A}$ – её расширенная матрица. Очевидно, что ранг матрицы $\tilde{A}$ не может быть меньше ранга матрицы A (почему?). Имеет место следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $rang\, A = rang\, \widetilde{A}$.

Следствие. Пусть ранги матриц A и $\tilde{A}$ равны: $rang\, A = rang\, \widetilde{A}$. Тогда,

1) если $rang\, A = rang\, \tilde{A} = n$ (n − число неизвестных), то система уравнений имеет единственное решение,

2) если $rang\, A = rang\, \widetilde{A} < n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

В примере 1.15 $rang\, A = rang\, \widetilde{A} = 4 = n$ (n − число неизвестных). Поэтому система имеет единственное решение.

Пример 1.16.

Исследовать и решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$

Решение.

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1),\ (-2) \\ + \\ \qquad + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1),(-2) \\ + \\ + \\ \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Процесс преобразований можно закончить, так как уже на этом этапе преобразований можно сделать вывод: *rang A*$\neq$*rang* $\widetilde{A}$, т. е. данная система уравнений несовместна (не имеет решений).

Ответ: ø.

2) Составим расширенную матрицу данной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2),(-1),(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда имеем, что система совместна. Так как ранг матрицы A меньше числа неизвестных $n = 4$, то система имеет бесконечное множество решений, которое получим следующим образом: перенесём неизвестные x_3 и x_4 в правые части уравнений (неизвестные x_3 и x_4 называют свободными неизвестными), получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Выразим неизвестные x_1 и x_2 через свободные: $x_2 = -2 + 2x_3 + x_4$, $x_1 = 1 - x_2 + 3x_3 = 1 - (-2 + 2x_3 + x_4) + 3x_3 = 3 - 2x_3 - x_4$,

т. е. $\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_3 - x_4, \\ x_2 = -2 + 2x_3 + x_4. \end{cases}$

Придавая произвольные значения неизвестным $x_3 = \alpha$ и $x_4 = \beta$, получим бесконечное множество решений данной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2\alpha - \beta, \\ x_2 = -2 + 2\alpha - \beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases}$$ Эти формулы дают общее решение системы.

Полагая, например, $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, получим частное решение.

Взяв другие значения α и β, получим другое частное решение.

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha - \beta \\ -2 + 2\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \right\}$.

Другая форма записи общего решения:

$\left\{ (3 - 2\alpha - \beta;\ -2 + 2\alpha + \beta;\ \alpha; \beta) \,\middle|\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \right\}$.

Замечание. В качестве свободных неизвестных в примере можно было взять какие-нибудь другие неизвестные, например, x_1 и x_2. Тогда общее решение получилось бы в другом виде.

Рассмотрим немного подробнее случай, когда система уравнений имеет бесконечное множество решений, т. е. когда $rang\ A = rang\ \tilde{A} = r < n$, n – число неизвестных. Множество решений системы можно получить следующим образом:

1) привести расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы к ступенчатому виду,

2) перенести $n - r$ неизвестных (например, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$) в правые части уравнений (эти неизвестные называются свободными неизвестными), в результате получится система, равносильная данной:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n, \end{cases}$$

3) придавая свободным неизвестным произвольные значения, из последней системы выразить оставшиеся базисные (главные) неизвестные x_1, x_2,…x_r через свободные неизвестные; в результате получится общее решение данной системы.

1.6.2. Однородная система линейных уравнений

Пусть дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_1nx_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_2nx_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Систему (1.11) можно записать в матричной форме

$$AX = O, \qquad (1.12)$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Перечислим свойства однородной системы линейных уравнений.

1) Однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Действительно, любая однородная система имеет хотя бы нулевое решение.

2) Если матрица-столбец $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – решение системы (1.11), то и столбец λa = $\begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \cdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$ – решение системы (1.11),

где λ – произвольное число.

3) Если матрицы-столбцы $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ – решения системы, то и матрица столбец $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1 \\ \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n\alpha_n + \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$ – решение системы (1.11).

Из свойства 3) следует, что всякая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

В каком случае однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения? Ответ на поставленный вопрос сформулирован в следующих теоремах.

Теорема (критерий существования ненулевых решений однородной системы линейных уравнений). Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы меньше числа неизвестных n ($rang\ A<n$).

Теорема. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель $|A|$ матрицы системы равен нулю ($|A|=0$).

Доказательство.

1) Если бы $|A|\neq 0$, то однородная система имела бы единственное решение – нулевое. Последнее противоречит условию. Следовательно, $|A|=0$.

2) Если $|A|=0$, то $rang\ A=r<n$ и, следовательно, однородная система имеет бесконечное множество решений, в том числе и ненулевых.

Заметим, что среди ненулевых решений однородной системы есть такие решения, через которые выражаются другие решения. Эти ненулевые решения называются фундаментальными (базисными) решениями. Как найти эти решения?

1.6.3. Фундаментальная система решений

Решения $a_1, a_2, \ldots, a_k$ однородной системы называются <u>линейно независимыми</u>, если линейная комбинация этих решений $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$ равна нулевому решению только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Совокупность решений a_1, a_2, …, a_k однородной системы называется <u>фундаментальной (базисной) системой решений</u> (фср), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) эта совокупность линейно независимая,

2) каждое решение однородной системы линейно выражается через эту совокупность решений.

Теорема (<u>о числе решений в фундаментальной системе решений</u>). Если ранг матрицы A системы меньше числа неизвестных n ($rang\ A = r < n$), то фундаментальная система решений состоит из $n - r$ решений.

Пример 1.17.

Найти общее решение и фундаментальную систему решений (фср) однородной системы уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3),(-4),(-3) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3),(2) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$Rang\ A = r = 2 < n = 4.$

Таким образом, фср состоит $n - r = 2$ решений; два главных (базисных) неизвестных, например, x_1 и x_2, и два свободных: x_3 и x_4. Найдём решения системы. По последней матрице восстановим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2(-6x_3 + 5x_4) - 4x_3 + 3x_4 = 8x_3 - 7x_{4,} \\ x_2 = -6x_3 + 5x_{4,} \end{cases}$$

т. е. $\begin{cases} x_1 = 8x_1 - 7x_{4,} \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}.$

Следовательно, общее решение имеет вид ($8x_3-7x_4$; $-6x_3+5x_4$; x_3; x_4), x_3, $x_4 \epsilon \boldsymbol{R}$.

Получим фср двумя способами.

<u>Первый способ</u>

Положим x_3=1 и x_4=0, тогда x_1=8, x_2=−6, а затем положим x_3=0 и x_4=1 тогда x_1=−7, x_2=5.

Таким образом, получим два частных решения данной однородной системы:

a_1 = (8, −6, 1, 0) и a_2 = (−7, 5, 0, 1), которые и составляют фср.

Все решения данной системы выражаются через фср по формуле $a = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2$, где λ_1, λ_2 – произвольные числа.

<u>Второй способ</u>

Запишем в матричном виде общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ 1x_3 - 0x_4 \\ 0x_3 + 1x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,$$

где λ_1, $\lambda_2 \in \boldsymbol{R}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\text{т}}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\text{T}}$.

Таким образом, a_1 = (8, −6, 1, 0), a_2 = (−7, 5, 0, 1) – фср.

Ответ: (общее решение) − ($8x_3-7x_4$; $-6x_3+5x_4$; x_3; x_4), x_3, $x_4 \epsilon \boldsymbol{R}$;

фср: a_1 = (8, −6, 1, 0), a_2 = (−7, 5, 0, 1).

1.7. Линейные пространства

1.7.1. Понятие линейного пространства

Одним из основных объектов, изучаемых в линейной алгебре, являются линейные пространства.

Непустое множество $\boldsymbol{V}$ с заданными на нём операциями сложения элементов множества $\boldsymbol{V}$ и умножением элементов множества $\boldsymbol{V}$ на действительные числа называется линейным (векторным) пространством, если выполнены следующие условия:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;
3) существует нулевой элемент $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{V}$ такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{a}$;
4) для каждого элемента $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{V}$ существует в $\boldsymbol{V}$ элемент $-\boldsymbol{a}$ (противоположный элементу $\boldsymbol{a}$) такой, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{\theta}$;
5) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$;
6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$;
7) $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$;
8) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,

где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ – произвольные элементы $\boldsymbol{V}$; α,β – произвольные действительные числа; 1 – действительное число. Элементы множества $\boldsymbol{V}$ называются векторами, а действительные числа – скалярами.

Пример 1.18.

Векторными пространствами являются:

1) множество матриц размера $m\times n$ с действительными элементами,
2) множество геометрических векторов трёхмерного пространства,
3) множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Таким образом, множество элементов любой природы, удовлетворяющее требованиям, сформулированным в определении, образует линейное (векторное) пространство.

n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, называемых компонентами (координатами) вектора, и записывается в виде строки $\boldsymbol{a}=(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$ или столбца

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

n-мерные векторы $\boldsymbol{a}=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ и $\boldsymbol{b}=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$ называются равными, если равны все их соответствующие компоненты, т. е. $\alpha_i=\beta_i$, где $i=1, 2, \ldots, n$.

Суммой векторов $\boldsymbol{a}=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ и $\boldsymbol{b}=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$ называется вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$.

Произведением скаляра $\lambda\in\boldsymbol{R}$ на вектор $\boldsymbol{a}=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ называется вектор $\boldsymbol{\lambda a}=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2,\ldots, \lambda\alpha_n)$.

Нетрудно доказать, что множество всех n - мерных векторов – линейное (векторное) пространство, которое обозначается $\boldsymbol{R^n}$ и называется n-мерным арифметическим пространством.

Замечание. n-мерные векторы можно рассматривать как матрицы-строки или как матрицы-столбцы.

1.7.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ – n-мерные векторы.

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$, что $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} +\ldots+ \lambda_k\boldsymbol{a_k}$.

Векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ называются линейно независимыми, если равенство $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} +\ldots+ \lambda_k\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{\theta}$ выполняется только при $\lambda_1= \lambda_2=\ldots= \lambda_k=0$.

Векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ называются линейно зависимыми, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$, одновременно неравные нулю, что $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} +\ldots+ \lambda_k\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{\theta}$.

Пример 1.19.

1) Векторы $\boldsymbol{a_1}=(1,1,2)$; $\boldsymbol{a_2}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{a_3}=(3,4,5)$ из пространства $\boldsymbol{R^3}$ являются линейно зависимыми, так как $2\boldsymbol{a_1} + 1\boldsymbol{a_2} + (-1)\boldsymbol{a_3}=\boldsymbol{\theta}$.

2) Векторы $\boldsymbol{e_1}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e_2}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e_3}=(0,0,1)$ из пространства $\boldsymbol{R^3}$ являются линейно независимыми, так как равенство $\lambda_1\boldsymbol{e_1}+ \lambda_2\boldsymbol{e_2}+ \lambda_3\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{\theta}$ возможно только при $\lambda_1= \lambda_2= \lambda_3=0$.

Действительно, $\lambda_1\boldsymbol{e_1}+ \lambda_2\boldsymbol{e_2}+ \lambda_3\boldsymbol{e_3}= \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+ \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+ \lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$.

С другой стороны, $\lambda_1\boldsymbol{e_1}+ \lambda_2\boldsymbol{e_2}+ \lambda_3\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Отсюда имеем: $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Последнее возможно только при $\lambda_1= \lambda_2= \lambda_3=0$.

Рассмотрим свойства линейной зависимости и независимости конечной системы векторов.

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Система векторов линейно зависима, если какая-нибудь её подсистема линейно зависима.

3. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

4. Система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ (k>1) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов данной системы векторов.

5. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, то тогда вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$, и притом единственным образом.

1.7.3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора

Конечная система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ пространства $\boldsymbol{V}$ называется базисом, если:

1) она линейно независима,
2) любой вектор пространства через неё линейно выражается.

Заметим, что не всякое пространство обладает конечным базисом. Пространства, в которых существуют конечные базисы, называются конечномерными. В линейной алгебре изучаются только конечномерные пространства.

Количество векторов в каком-нибудь базисе пространства $\boldsymbol{V}$ называется размерностью и обозначается $dim\boldsymbol{V}$.

Пример 1.20.

В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ в качестве базиса можно взять совокупность n векторов: $\mathbf{e}_1$=(1,0,0,…,0,0), $\mathbf{e}_2$=(0,1,0,…,0,0),…, $\mathbf{e}_{n-1}$=(0,0,0,…,1,0), $\mathbf{e}_n$=(0,0,0,…,0,1).

Действительно, в том, что эта система векторов линейно независима, легко убедиться (см. пример 1.19).

Покажем, что любой вектор $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in \boldsymbol{R}^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n$. Представим вектор $\boldsymbol{a}$ в следующем виде: $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,0,\dots,0)+$ $+(0,\ \alpha_2,\dots,0)+\dots+(0,0,\dots,\ \alpha_n)=\ \alpha_1(1,0,\dots,0)\ +\ \alpha_2(0,1,\dots,0)\ +\dots+\ \alpha_n(0,0,\dots,1)=$ $\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\dots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$ – что и требовалось.

Следовательно, конечная система векторов $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ – один из базисов пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ – базис пространства $\boldsymbol{V}$, тогда любой вектор $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{V}$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\boldsymbol{a}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n. \qquad (1.13)$$

Доказательство.

Пусть для вектора $\boldsymbol{a}$ кроме представления (1.13) имеется ещё одно представление через базисные векторы:

$$\boldsymbol{a}=\beta_1\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n, \qquad (1.14)$$

тогда $\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n=\beta_1\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n$ или

$$(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\boldsymbol{e}_n=\theta. \qquad (1.15)$$

Так как векторы $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ являются базисом пространства $\boldsymbol{V}$, то они являются линейно независимыми. Поэтому равенство (1.15) возможно только при $\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\ldots=\alpha_n-\beta_n=0$. Отсюда имеем: $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2,\ldots$, $\alpha_n=\beta_n$. Последнее и означает, что для вектора $\boldsymbol{a}$ существует единственное представление через базисные векторы, что и требовалось доказать.

В равенстве (1.13) коэффициенты α_1, α_2, …, α_n называются <u>координатами вектора</u> $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$.

Заметим, что наряду с записью (1.13) применяется запись $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Таким образом, совокупность координат вектора является элементом арифметического пространства $\boldsymbol{R}^n$. С этим связана особая роль арифметического пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ n-мерного пространства заданы своими координатами в некотором базисе пространства. Для выяснения линейной зависимости векторов рассматривают матрицу, составленную из координат данных векторов. Векторы будут линейно независимыми в том и только в том случае, когда ранг этой матрицы равен числу векторов системы.

Пример 1.21.

Выяснить линейную зависимость систем векторов. В линейно зависимых системах выписать какую-нибудь линейную зависимость:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1)$,
$\boldsymbol{a}_2=(3,-4,0,-1)$,
$\mathbf{a}_3=(2,0,1,-1)$,
$\boldsymbol{a}_4=(13,-10,3,-2)$.

2) $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4$,
$\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4$,
$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$.

Решение.

1) Составим матрицу B, в строках которой запишем координаты векторов:

$$B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{a_2}\\ \boldsymbol{a_3}\\ \boldsymbol{a_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -4 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 13 & -10 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l}(-3),(-2),(-13)\\ +\\ +\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -7 & -3 & -4\\ 0 & -2 & -1 & -3\\ 0 & -23 & -10 & -15\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ +\\ (-3),(-11)\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & -2 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 1 & 18\end{pmatrix}\begin{array}{l}(-2),(-1)\\ \\ +\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 13\end{pmatrix}$$

$Rang\ B=3<n=4$ (n−число векторов).

Следовательно, данная система векторов линейно зависима. Это означает, что выполняется равенство $\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\alpha_2\boldsymbol{a_2}+\alpha_3\boldsymbol{a_3}+\alpha_4\boldsymbol{a_4}=\boldsymbol{0}$ (где не все α_i равны нулю). Распишем это векторное равенство:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}13\\-10\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3+13\alpha_4=0,\\ \alpha_1-4\alpha_2-10\alpha_4=0,\\ \alpha_1+\alpha_3+3\alpha_4=0,\\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_4=0.\end{cases}$$

у которой матрица A системы является транспонированной матрице B : $A=B^T$. Решим полученную систему.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&13\\1&-4&0&-10\\1&0&1&3\\1&-1&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&13\\0&-7&-2&-23\\0&-3&-1&-10\\0&-4&-3&-15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&13\\0&-1&0&-3\\0&-3&-1&-10\\0&-1&-2&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&13\\0&-1&0&-3\\0&0&-1&-1\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\sim$$

$\sim\begin{pmatrix}1&3&2&13\\0&-1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, $rangA=3<n=4$.

Система имеет бесчисленное множество решений, главные неизвестные: α_1, α_2, α_3, свободное неизвестное α_4.

Выразим главные неизвестные через свободное:

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3+13\alpha_4=0,\\ \alpha_2+3\alpha_4=0,\\ \alpha_3+\alpha_4=0,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1=-2\alpha_4,\\ \alpha_2=-3\alpha_4,\\ \alpha_3=-\alpha_4.\end{cases}$$

Найдём частное решение, положив, например, $\alpha_4=-1$. Тогда $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=1$. Получаем следующее равенство: $2\boldsymbol{a_1}+3\boldsymbol{a_2}+\boldsymbol{a_3}-\boldsymbol{a_4}=\boldsymbol{\theta}$.

2) Составим матрицу A из координат данных векторов и найдём ранг этой матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{a_2}\\ \boldsymbol{a_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&1&-1\\2&1&0&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1\\0&7&-2&3\\0&4&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1\\0&7&-2&3\\0&0&8&2\end{pmatrix}.$$

$RangA=3<n=4$. Следовательно, данные векторы линейно независимы.

1.7.4. Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть в n-мерном пространстве $\boldsymbol{V}$ заданы два базиса $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ – «старый» базис и $\boldsymbol{e_1}',\boldsymbol{e_2}',\ldots,\boldsymbol{e_n}'$ – «новый» базис. Каждый из векторов «нового» базиса можно выразить через векторы «старого» базиса:

$$\begin{cases}\boldsymbol{e_1}'=c_{11}\boldsymbol{e_1}+c_{21}\boldsymbol{e_2}+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{e_n},\\ \boldsymbol{e_2}'=c_{12}\boldsymbol{e_1}+c_{22}\boldsymbol{e_2}+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{e_n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{e_n}'=c_{1n}\boldsymbol{e_1}+c_{2n}\boldsymbol{e_2}+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{e_n}.\end{cases}$$

Матрица $T=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\ldots&\ldots&\cdots&\ldots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$ называется <u>матрицей перехода от «старого» базиса к «новому» базису.</u>

<u>Замечание.</u> В матрице T координаты векторов «нового» базиса, разложенных по «старому» базису, располагаются в матрице перехода T по столбцам.

Нетрудно показать, что связь между координатами вектора в разных базисах задаётся формулой:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \cdots c_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ c_{n1}\, c_{n2} \cdots c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1{}' \\ \alpha_2{}' \\ \dots \\ \alpha_n{}' \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$X=TX\,', \tag{1.16}$$

где X, X' − матрицы-столбцы из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в «старом» и «новом» базисах соответственно, T – матрица перехода от «старого» к «новому» базису.

Связь координат вектора в «новом» базисе через координаты вектора в «старом» базисе задаётся формулой

$$X'=T^{-1}X. \tag{1.17}$$

Формулы (1.16) и (1.17) называются <u>формулами преобразования координат.</u>

Пример 1.22.

Вектор $\boldsymbol{x}$=(1,2,3) в «старом» базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ задан своими координатами. Найти координаты этого вектора в «новом» базисе $\boldsymbol{e_{1'}}, \boldsymbol{e_{2'}}, \boldsymbol{e_{3'}}$, если «новые» базисные векторы выражаются через «старые» базисные векторы по формулам: $\begin{cases} \boldsymbol{e_1}' = 6\boldsymbol{e_1} - 3\boldsymbol{e_2}, \\ \boldsymbol{e_2}' = -4\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}, \\ \boldsymbol{e_3}' = 5\boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}. \end{cases}$

Решение.

Составим матрицу T перехода от «старого» базиса к «новому»:

$T = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, где в 1-м столбце – координаты вектора $\boldsymbol{e_{1'}}$, во 2-м – координаты вектора $\boldsymbol{e_{2'}}$, в 3-м – координаты вектора $\boldsymbol{e_{3'}}$ в «старом базисе».

Найдём матрицу T^1:

$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в «новом» базисе:

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: новые координаты вектора $\boldsymbol{x}$=(−2, −2, 1).

1.8. Евклидовы пространства

1.8.1. Евклидово пространство

Линейное (векторное) пространство $\boldsymbol{V}$ называется евклидовым, если любым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{V}$ ставится в соответствие действительное число, обозначаемое $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$,
2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=(a,b)+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,
3) $(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,
4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})>0$, Для любого $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{\theta}$ и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$.

Здесь $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ – произвольные векторы из $\boldsymbol{V}$; α – произвольное действительное число.

Обозначение евклидова пространства: $\boldsymbol{E}$.

Число $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ называется скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Длиной (нормой) вектора $\boldsymbol{a}$ в евклидовом пространстве называется число $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$.

Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется число φ, определяемое из равенства:

$cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$, где $0\leq\varphi\leq\pi$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называются ортогональными, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$.

Заметим, что нулевой вектор ортогонален любому вектору $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{E}$.

Пример 1.23. В арифметическом n-мерном пространстве $\boldsymbol{R^n}$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ и $\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ можно задать формулой

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n. \qquad (1.18)$$

Нетрудно проверить выполнимость условий 1−4, которым должно удовлетворять скалярное произведение.

$\boldsymbol{E^n}$ − обозначение евклидова пространства со скалярным произведением, задаваемой формулой (1.18).

Пример 1.24. В пространстве непрерывных функций на отрезке $[\alpha,\beta]$ скалярное произведение векторов $f(t)$ и $g(t)$ можно задать формулой $(f(t),g(t))=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt$.

Замечание. В одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно задать по-разному. В результате получаются разные евклидовы пространства.

1.8.2. Ортонормированный базис

Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется ортогональной, если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=0$ и $i \neq j$. Если кроме этого для каждого вектора $\boldsymbol{e}_i$ его норма $|\boldsymbol{e}_i|=1$ для всех $i=1,2,\ldots,n$, то система векторов называется ортонормированной.

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если он является ортонормированной системой векторов.

Теорема. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример 1.25.

В евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}^n$ ортонормированным базисом является, например, базис:

$\boldsymbol{e}_1= (1,0,0,\ldots,0,0)$,

$\boldsymbol{e}_2= (0,1,0,\ldots,0,0)$,

…………………………

$\boldsymbol{e}_n= (0,0,0,\ldots,0,1)$.

1.9. Линейные операторы

1.9.1. Линейный оператор

Линейным оператором называется отображение φ пространства $\boldsymbol{V}$ на себя: $\varphi=\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})= \varphi(\boldsymbol{a})+ \varphi(\boldsymbol{b})$,
2) $\varphi(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\, \varphi(\boldsymbol{a})$,

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – произвольные векторы пространства $\boldsymbol{V}$, а α − произвольное действительное число.

Пример 1.26.

В пространстве $\boldsymbol{R}^3$, отображение $\varphi:(x_1, x_2, x_3)\to(2x_1, x_2+x_3, 0)$ является линейным оператором. Покажем это:

1. $(2x_1; x_2+x_3; 0) \epsilon \boldsymbol{R^3}$.

2. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$; $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)$ – произвольные векторы из $\boldsymbol{R^3}$. Тогда $\boldsymbol{x+y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ и $\varphi(\boldsymbol{x+y})= \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$ $= (2(x_1+y_1), (x_2+y_2)+(x_3+y_3), 0) = (2x_1, x_2+x_3, 0)+(2y_1, y_2+y, 0)= \varphi(\boldsymbol{x})+ \varphi(\boldsymbol{y})$, т. е. первое условие из определения линейного оператора выполняется.

3. Нетрудно проверить выполнимость и второго условия из определения.

Следовательно, φ – линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{R^3}$.

Пример 1.27.

$\boldsymbol{\Lambda(x)}=\lambda \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор из $\boldsymbol{V}$, λ – фиксированное действительно число.

Отображение $\boldsymbol{\Lambda}$: $\boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ является линейным оператором (проверьте).

Пример 1.28.

Отображение $\varphi: \boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ заданное формулой $\varphi(x_1, x_2, x_3)=$ $= (x_1+1, x_2, -x_3)$ не является линейным оператором, так как не выполняется условие 1 из определения.

Действительно, если $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3) \epsilon \boldsymbol{R^3}$, то $\varphi(\boldsymbol{x+y})=$ $=\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = \varphi(x_1+y_1+1, x_2+y_2, -x_3-y_3)=(x_1+1, x_2, -x_3)+(y_1, y_2, -y_3) \neq (x_1+1, x_2, -x_3)+(y_1+1, y_2, -y_3)= \varphi(\boldsymbol{x})+ \varphi(\boldsymbol{y})$.

1.9.2. Матрица линейного оператора

Пусть пространство $\boldsymbol{V}$ – n-мерное пространство и φ − линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{V}$. Чтобы задать линейный оператор, достаточно указать образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\boldsymbol{V}$, т. е. указать векторы $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Тогда столбец из координат вектора $\boldsymbol{x} \epsilon \boldsymbol{V}$ в данном базисе и столбец координат $\boldsymbol{y}= \varphi(\boldsymbol{x})$ связаны соотношением: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где A_φ – квадратная матрица порядка n, в столбцах которой стоят координаты образов $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\boldsymbol{V}$. Матрица A_φ называется матрицей линейного оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Пример 1.29.

Найти матрицу линейного оператора из примера 1.26.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$=(1,0,0), $\boldsymbol{e}_2$=(0,1,0), $\boldsymbol{e}_3$=(0,0,1) − базис пространства $\boldsymbol{R}^3$. Найдём координаты φ($\boldsymbol{e}_1$), φ($\boldsymbol{e}_2$), φ($\boldsymbol{e}_3$) в базисе $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$:

φ($\boldsymbol{e}_1$)= φ (1,0,0)=(2·1,0+0,0)=(2,0,0),

φ ($\boldsymbol{e}_2$)= φ (0,1,0)=(2·0,1+0,0)=(0,1,0),

φ ($\boldsymbol{e}_3$)= φ (0,0,1)=(2·0,0+1,0)=(0,1,0).

Запишем координаты векторов φ($\boldsymbol{e}_1$), φ($\boldsymbol{e}_2$), φ($\boldsymbol{e}_3$) в столбцы матрицы, получим матрицу A_φ данного оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.9.3. Собственные значения и собственные векторы

Пусть φ – линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{V}$.

Ненулевой вектор $x\epsilon\boldsymbol{V}$ называется собственным вектором линейного оператора φ, если существует такое действительное число λ, называемое собственным значением линейного оператора, что

$$\varphi\,(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}. \qquad (1.19)$$

Равенство (1.19) означает, что под действием оператора φ собственный вектор $\boldsymbol{x}$ превращается в коллинеарный ему вектор $\lambda\boldsymbol{x}$.

Решим задачу нахождения собственных векторов оператора. Запишем равенство (1.19) в матричной форме:

$$A_\varphi X=\lambda X, \text{ или } A(x) =\lambda\boldsymbol{x} \text{ или } (A_\varphi-\lambda E)X=O. \qquad (1.20)$$

Для существования ненулевых решений должно выполняться условие:

$$|A_\varphi-\lambda E|=0. \qquad (1.21)$$

Распишем уравнение (1.21) относительно λ, получим:

$$\left|A_\varphi - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то получим уравнение n-й степени относительно λ, которое называется характеристическим уравнением оператора φ. Действительные корни характеристического уравнения являются собственным числами оператора φ.

Решив характеристическое уравнение, получим собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Для каждого найденного собственного значения λ_i найдём соответствующие собственные векторы; координаты $x_1,x_2,\ldots,x_n$ собственных векторов являются ненулевыми решениями системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_2)x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad \cdots \quad + (a_{nn}-\lambda_n)x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.22)$$

Заметим, что матричное уравнение (1.20) – матричная запись системы уравнений (1.22); множество его решений и будет множеством собственных векторов, отвечающих λ_i.

Пример 1.30.

Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим уравнение: $(2-\lambda)(\lambda^2-9)=0$. Его корнями являются $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$.

Найдём собственные векторы данного оператора, соответствующие найденным собственным значениям.

Координатные столбцы $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ собственных векторов удовлетворяют уравнению (1.20), а координаты собственных векторов (x_1,x_2,x_3) удовлетворяют системе уравнений вида (1.22):

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + (2-\lambda)x_3 = 0, \\ 8x_1 + (-1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \qquad (1.23)$$

При $\lambda=2$ система (1.23) принимает вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 8x_1 - 3x_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$\{\boldsymbol{a}_1=(0,x_2,0) | x_2 \epsilon \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\}$; фср: (0,1,0).

При λ=3 система (23) принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 8x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$\{\boldsymbol{a}_2=(x_1;x_2;2x_1)|x_1\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}\}$; фср: $\{(1,1,2)\}$.

При $\lambda= -3$ система (1.23) принимает вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 = 0, \\ 8x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$\{\boldsymbol{a}_3=(x_1, -\frac{1}{5}x_1, -4x_1)|x_1\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}\}$; фср: $\{(5, -1, -20)\}$.

<u>Проверка.</u> Проверим, что вектор $\boldsymbol{a}_1$=(0,1,0) является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ_1=2.

$$A_\varphi \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{a}_1.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}_1$=(0,1,0) – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1 =2.

Аналогично,

$$A_\varphi \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{a}_2,$$

$$A_\varphi \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 60 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -20 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{a}_3.$$

Собственные векторы определены верно.

Ответ: собственные значения: λ_1=2, λ_2=3, λ_3=−3; собственные векторы соответственно: $(0,x_2,0)$;$(x_1,x_1,2x_1)$;$(x_1, -\frac{1}{5}x_1, -4x_1)$, $x_2,x_1\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

1.10. Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение матрицы. Перечислить виды матриц.
2. Какие арифметические операции можно производить над матрицами?
3. Любые ли две матрицы можно складывать (умножать)?
4. Для всякой ли матрицы можно написать определитель?

5. Что означает, что матрица является невырожденной?
6. Для всякой ли матрицы можно найти обратную?
7. Существует ли связь между алгебраическим дополнением и минором элемента матрицы?
8. Сформулировать определение ступенчатой матрицы. Всякую ли матрицу можно привести к ступенчатому виду?
9. Сколькими способами можно найти ранг матрицы?
10. Описать способы нахождения ранга матрицы.
11. Всякую ли систему линейных уравнений можно решить по правилу Крамера (методом обратной матрицы, методом Гаусса)?
12. Какова идея метода Гаусса?
13. Справедливо ли утверждение, что всякая система линейных однородных уравнений является совместной.
14. В каком случае система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения?
15. Сформулировать определение фундаментальной системы решений (фср). Всякая ли система линейных однородных уравнений имеет фср?
16. Сформулировать определение линейного оператора.
17. Какова особенность собственного вектора линейного оператора?
18. Сформулировать определение векторного пространства.
19. Во всяком ли векторном пространстве существует базис?

1.11. Тест «Линейная алгебра»

1. Единичной матрицей является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Диагональной матрицей является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Ступенчатой является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Для матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ можно выполнить операции.

a) $A+B$ b)$B+A^T$ c)AB d)BA.

5. Если $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, то

a) AB не существует

b) $AB=\begin{pmatrix}2 & 7 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

c) $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

d) нет верного ответа.

6. Последовательность матриц в порядке убывания их ранга.

a) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

7. Решением системы линейных уравнений $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=4,\\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=2,\\ 4x_1-x_2+5x_3-2x_4=8\end{cases}$ является

a)$(1,1,1,0)$ b)$(-1,-1,-1,0)$ c) $(2,0,0,0)$ d)$(3,1,1,0)$.

8. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases}2x_1-5x_2-4x_3+6x_4=0,\\ x_1+3x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$ состоит из

a) одного решения

b) двух решений

c) трёх решений

d) нуль решений.

9. Если в определителе поменять местами две строки, то определитель

a) не изменится

b) обратится в нуль

c) изменит знак на противоположный

d) нет верного ответа.

10. Невырожденной матрицей является матрица

a) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $d)$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

11. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Обратная для матрицы A является матрица:

a) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

12. Систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ можно решить по методу Крамера, так как

a) $|A_1|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

c) $|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

d) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

13. Однородная система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными имеет ненулевые решения, если

a) $|A|=0$

c) $|A|>0$

b) $|A|\neq0$

d) $|A|<0$.

14. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

a) система имеет единственное решение

b) в общем решении системы три главных и одно свободное неизвестное

c) система неопределённая, её общее решение зависит от двух свободных неизвестных

d) система имеет бесконечное множество решений.

15. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет бесконечное множество решений, если

a) $n > m$

b) $n < m$

c) $n = m$

d) $r < n$, где r – ранг матрицы системы.

16. Всякая однородная система линейных уравнений является

a) совместной

b) определённой

c) неопределённой

d) несовместной.

17. Матрица имеет обратную, если

a) она вырожденная

b) определитель матрицы отличен от нуля

c) число её строк равно числу её столбцов

d) она невырожденная.

18. Матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) имеет единственное решение

b) не имеет решения

c) имеет бесконечное множество решений

d) имеет более одного решения.

19. Матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) система совместная

b) система приведена к ступенчатому виду

c) система несовместная

d) система определённая.

20. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & a \\ 3 & 3 & 3 & a \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

a) ранг матрицы равен 4 при $a \neq 0$

b) ранг матрицы равен 2 при $a=0$

c) ранг матрицы равен 2 при $a=0$

d) ранг матрицы не зависит от параметра a.

21. Линейно зависимой системой векторов пространства $\boldsymbol{R}^3$ является

a) (1,2,3), (0,0,0), $(-1, -2, -10)$

b) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

c) (1,1,1), (2,3,4), (−2, −2, −2)

d) (1,0,0), (0,1,0), (2,2,2), (0,0,1).

22. Линейно независимой системой векторов пространства $\boldsymbol{R}^3$ является

a) (1,2,3), (0,0,0), (1,2, −10)

b) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

c) (1,1,1), (2,3,4), (−2, −2, −2)

d) (1,1,1), (0,1,1), (0,0,1).

23. Базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$ является система векторов

a) (1,2,3), (1,0,0), (-1,2,10)

b) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

c) (1,1,1), (2,3,4), (−2, −2, −2)

d) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0).

24. Нормированными векторами пространства $\boldsymbol{E}^4$ являются

a) (1,0,1,0)

b) (1,1,1,1)

c) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

25. Последовательность векторов в порядке убывания их норм (длин)

a) (1,2,3,0)

b) (−2,1,1),

d) (1,1,1,1)

e) (0,1).

26. Из данных операторов не являются линейными

a) $\varphi(\boldsymbol{x})=(x_1\text{-}x_2, x_3, x_2)$

b) $\varphi(\boldsymbol{x})=(x_1+3x_3, x_3, x_2)$

c) $\varphi(\boldsymbol{x})=(x_1+3, x_3, x_2)$

d) $\varphi(\boldsymbol{x})=(x_1\, x_2, x_3, x_3)$.

27. Соответствие линейного оператора его матрице:

a) $\varphi(\boldsymbol{x})=(2x_1+x_2+x_3; -x_1\, x-2x_2-x_3; x_1+x_2+2x_3)$

b) $\varphi(\boldsymbol{x})=(2x_1-x_2+x_3; -x_1-2x_2-x_3; x_1+x_2+2x_3)$

c) $\varphi(\boldsymbol{x})=(2x_1+x_2+x_3; x_1-2x_2+x_3; x_1-x_2+2x_3)$

d) $\varphi(\boldsymbol{x})=(2x_1+x_2+x_3; x_1-2x_2+x_3; x_1-x_2+2x_3)$.

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; 2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\ 5)\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

28. Характеристический многочлен линейного оператора позволяет определить

a) только количество собственных значений

b) все собственные значения

c) все несобственные значения

d) нет правильного ответа.

29. В порядке увеличения числа различных собственных значений матрицы линейных операторов располагаются

$$a)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ b)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ c)\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ d)\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

30. Собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, ….

1.12. Задачи

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Найти $A+B$, $B+A$, $A-B$, $B-A$, AB, BA, $-3A$, B^T.

1.2. Вычислить произведения АB и BA, если

1) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$;

2) $A = (1\ \ 2\ \ 3),\ B = \begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, B = (2\ \ -1)$;

5) $A = (-1\ \ 2), B = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 2\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & -4 & -5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.3. Найти матрицу A^2-4B, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти:

1) A^2-B^2;
2) B^2+A^2;
3) AB;
4) BA;
5) $B^2-2BA+A^2$;
6) $3A^2-4B+5E$.

1.5. Вычислить значение многочлена $f(x)=2x^2-3x+5$ от матрицы A, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^T$.

1.6. Решить матричное уравнение вида $AX=B$, если:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Решить матричное уравнение вида $XA=B$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.8. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.9. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & 4 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.10. Вычислить определители, используя свойства определителей:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$,

3) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

1.11. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов:

1) второй строки;
2) третьего столбца.

1.12. Вычислить определители из задания 1.9, используя теорему о разложении.

1.13. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.14. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$, 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

1.15. Какие из следующих матриц являются обратимыми:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.16. Найти матрицу A^{-1}, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.17. Привести данную матрицу к ступенчатому виду:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.18. Найти ранги матриц из задания 1.17.

1.19. Найти ранги матриц двумя способами (с помощью элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров):

1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.20. Найти ранги следующих матриц при различных значениях параметра a:

1) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1.21. Выяснить, являются ли строки матрицы линейно независимыми:

1) $(2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; -1), (-4 \;\; -6 \;\; -8 \;\; 2)$, 2) $(1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4), (2 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 1)$.

1.22. Найти максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

1.23. Методом обратной матрицы решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6_{x3} = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 - 4x_2 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.24. Методом Крамера решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.25. Методом Гаусса решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3, \\ -5x_1 + x_2 - x_4 = -19, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 2, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 21. \end{cases}$

1.26. Исследовать и решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \quad = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 = -3. \end{cases}$

1.27. Найти фундаментальную систему решений систем уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 13x_3 \quad = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

1.28. Выяснить, является ли векторным (линейным) пространством:

1) множество многочленов степени n с действительными коэффициентами;

2) множество многочленов степени $\leq n$ с действительными многочленами.

1.29. Множество $\boldsymbol{V}$ состоит из одного элемента $\boldsymbol{\theta}$. Операции в $\boldsymbol{V}$ определены следующим образом:

1) $\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$, 2) $\lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$, где λ – любое действительное число.

Проверить, что $\boldsymbol{V}$ – векторное пространство.

1.30. Выяснить, является ли векторным пространством множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a,b,c – любые действительные числа, относительно сложения матриц и умножения на действительное число.

1.31. Являются ли следующие множества матриц векторными пространствами:

1) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$,   2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \boldsymbol{R}\right\}$?

1.32. Найти линейную комбинацию $2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+6\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,-2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-3,0,0,1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = 2x^2 - 3x + 1$, $\boldsymbol{a}_2 = 3x^2 + x$, $\boldsymbol{a}_3 = 2x - 1$.

1.33. Решить уравнение $2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{x})+3(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3-2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{x}$, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-4,1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.34. В указанных векторных пространствах определить, линейно зависима или линейно независима данная система векторов.

1) В $\boldsymbol{R}^3$:

a) (0,0,0);

b) (−2,1,1);

c) (1,0,0,), (0,1,0), (0,0,1);

d) (1,0,0), (0,1,0), (1,1,2);

e) (−1,1,1), (−1,1, −2), (0,0,3);

f) (3,2,1), (−1,1,1), (−1,1, −2), (0,0,3);

g) (−3,3,3), (0,0,1), (4, −4, −4).

2) В векторном пространстве квадратных матриц 2-го порядка с действительными элементами:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1.35. Показать, что каждая из нижеприведённых систем векторов является базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,7,4)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(3,1,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,1,-3)$, $\boldsymbol{a}_3=(4,1,7)$.

1.36. При каких значениях параметра λ система векторов (1, 2, −1, 1), (5,1,2,1), (4, −1,λ,0), (3,λ,4, −1) являются базисом пространства $\boldsymbol{R}^4$.

1.37. Доказать, что для любых α, β, γ система векторов $(1, \alpha, \beta)$, $(0,1,\gamma)$, $(0,0,1)$ являются базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$.

1.38. Выяснить, можно ли в пространстве $\boldsymbol{R}^2$. задать скалярное произведение $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2))$ с помощью следующих формул:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2, \quad \alpha, \beta \in R\backslash\{0\}$;
2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$;
3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_2 y_2$;
4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1||y_1| + |x_2||y_2|$.

1.39. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}^4$ найти угол между следующими парами векторов:

1) $\boldsymbol{a}=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(3,5,1,1)$;
2) $\boldsymbol{a}=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(3,-5,1,1)$;
3) $\boldsymbol{a}=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-3,-3,-3,-3)$;
4) $\boldsymbol{a}=(2,1,3,1,)$, $\boldsymbol{b}=(1,2,-2,1)$.

1.40. Выяснить, являются ли ортогональными (ортонормированными) следующие системы векторов из пространства $\boldsymbol{E}^4$:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -5, -2, 10)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 11, -6, -22)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (3, 11, 4, 7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3, -2, -6, 4)$;
2) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 5, 1, 10)$;
3) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,-6,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5,7,7,8)$, $\boldsymbol{a}_4 = (7,4,3,-3)$.

1.41. Указать, какие из следующих операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, являются линейными:

1) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1, 2x_2, -3x_3)$;
2) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$;
3) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_3)$;
4) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2^2, x_3)$;
5) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$.

Для линейных операторов найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\varphi(\boldsymbol{x})$.

1.42. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе, матрицами:

1) $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.43. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом $\boldsymbol{R}^3$, и найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах:

$\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,3,3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,7,1)$;
$\boldsymbol{e}'_1 = (3,1,4)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (5,2,1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (1,1,-6)$.

1.13. Ответы

1.1. $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 6\\ 3 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 12 & -8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3 & -6\\ -9 & -12\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

1.2. 1) $AB = \begin{pmatrix}5 & -10\\ 9 & -22\\ 23 & -14\end{pmatrix}$, 2) $AB = (8)$, $BA = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 3) $AB =$ $= \begin{pmatrix}8 & 8\\ 9 & 7\end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 9 & 11\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}$, 4) $AB = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 5) $AB = (4)$, $BA = \quad = \begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, 6) $AB = \begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 10 & 9\\ -5 & 0 & -7\end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix}29 & 17 & 14\\ -56 & -36 & -25\\ 27 & 19 & 11\end{pmatrix}$.

1.3. 1) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}0 & -8\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

1.4. 1) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 8\end{pmatrix}$.

1.5. 1) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}-8 & 9\\ -6 & -2\end{pmatrix}$.

1.6. 1) $\begin{pmatrix}-\alpha & 2-\beta\\ 2 & -2\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$; 2) нет решения.

1.7. 1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}5-\alpha & \alpha & -2\\ -2-\beta & \beta & 2\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

1.8. 1) 38, 2) 1, 3) 0, 4) −5.

1.9. 1) 40, 2) −21, 3) 0, 4) 12.

1.10. 1) 0, 2) 0, 3) 0, 4) −18.

1.11. 1) $M_{21} = 0$, $M_{22} = 0$, $M_{23} = 11$; $A_{21} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = -11$; 2) $M_{13} = -16$, $M_{23} = 11$, $M_{33} = -2$; $A_{13} = -16$, $A_{23} = -11$, $A_{33} = -2$.

1.13. 1) $4a+c+d$, 2) $10a-5b-5d$.

1.14. 1) $x_1=0$, $x_2=1$, 2) $x_1=2$, $x_2=3$.

1.15. 1) обратимая, 2) не является обратимой, 3) не является обратимой, 4) обратимая.

1.16. 1) $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$,

3) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 4) $-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

1.18. 1) 4, 2) 2.

1.19. 1) 2, 2) 3.

1.20. 1) при $a = 3$ $r = 2$, при $a \neq 3$ $r = 3$, 2) при $a = 1$ $r = 1$, при $a \neq 1$ $r = 4$.

1.21. 1) линейно зависимые, 2) линейно независимые.

1.22. 1) 2, 2) 2.

1.23. 1) x_1=1, x_2=0, x_3=−2, 2) x_1=3, x_2=2, x_3=−1, 3) x_1=1, x_2=3, x_3=5, 4) x=2, x= −1, x=1.

1.24. 1) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$,
2) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$,

1.25. 1) x_1= 5, x_2= 7, x_3= 0, x_4=1,
2) x_1= 2, x_2= −2, x_3= 1,
3) x_1 = −2, x_2= 3, x_3= 5, x_4 = 2,
4) x_1= 2, x_2= −1, x_3= 1.

1.26. 1) $x_1 = \frac{-2+\alpha-9\beta}{11}$, $x_2 = \frac{10-5\alpha+\beta}{11}$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$,
2) $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, x_3=13, $x_4=19-3\alpha-2\beta$, $x_5=-34$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$,
3) x_1= система несовместна, 4) x_1= 3, x_2= 2, x_3= 1,
5) x_1=x_2=x_3=0, 6) система несовместна.

1.27. 1) a_1= (−1,2,1,0,0), a_2 = (−2,8,0,1,0), 2) a_1=(0,1,1,0), a_2= (1,7,0, −5), 3) a_1= (8, −6,1,0), a_2= (−7,5,0,1), 4) a_1= (−7,5,0,1), a_2= (7, −5,0,2), 5) система имеет только нулевое решение, 6) a = (9, −5, −1,1).

1.28. 1) не является, 2) является.

1.30. Является.

1.31. 1) является, 2) не является.

1.32. 1) (−8,8, −5, −4), 2) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -31 & -6 \end{pmatrix}$, 3) $-5x^2+3x-4$.

1.33. 1) $(-1, \frac{19}{9})$, 2) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 & -19 \\ 19 & -9 \end{pmatrix}$.

1.34. 1) a) линейно зависима, b) линейно независима, c) линейно независима, d) линейно независима, e) линейно зависима,
f) линейно зависима, g) линейно зависима,

2) a) линейно независима,b) линейно зависима, c) линейно зависима.

1.36. при $\lambda = 3$ и $\lambda = -3$ система векторов линейно зависима.

1.38. 1) нельзя, 2) нельзя, 3) можно, 4) нельзя.

1.39.1) $cos\varphi = \frac{5}{12}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = -\pi$; 4)$cos\varphi = -\frac{1}{5\sqrt{6}}$.

1.40.1) не является ортогональной, 2) ортогональная система векторов, но не ортонормированная, 3) не является ортогональной.

1.42. 1) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

2) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

3) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) оператор φ не является линейным,

5) оператор φ не является линейным.

1.43. 1) $\lambda = 3$, $\alpha\left(1, -\frac{2}{5}, 1\right)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$,

$\lambda = -3$, $\beta(-1,0,1)$, $\beta \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$,

$\lambda = -2$, $\gamma(-5,1,5), \gamma \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$;

2) $\lambda = 1$, $\alpha(1,0,0)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$,

$\lambda = -1, \beta(-1,1,0)$, $\beta \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$,

$\lambda = 0$, $\gamma(-1,1,1)$, $\gamma \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$;

3) $\lambda = 2$, $\alpha(0, -1,1)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$,

4) $\lambda = 2$, $\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,1)$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

1.14. Типовой расчёт «Линейная алгебра»

1. Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&4&3\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&2\\3&4&3\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&-1\\0&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&1\\3&2&-1\\5&0&9\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&2&1\\1&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&0&5\\3&1&2\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}1&2&2\\3&-1&0\\4&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1&5\\2&3&0\\0&1&-4\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2&-1&7\\3&1&1\\0&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-5&0\\0&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix}1&3&6\\2&2&0\\3&-2&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&-1\\2&4&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0&2\\4&5&3\\1&2&1\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}2&-1&4\\4&2&1\\3&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5&1\\2&0&3\\3&2&-5\end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix}3&2&-3\\2&0&-1\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&3\\5&2&0\\1&3&4\end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix}5&0&-1\\3&1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&0\\-4&1&2\\1&0&5\end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix}-1&0&3\\5&3&0\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&6&0\\-5&3&4\\6&2&7\end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix}6&2&5\\-3&1&1\\4&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&3\\2&2&4\\0&5&6\end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix}5&0&2\\0&-1&2\\-2&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&2\\4&3&1\\1&1&9\end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix}1&1&5\\2&-3&2\\0&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&4\\3&6&0\\2&-2&3\end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&2\\0&5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&-1\\3&4&4\\2&0&1\end{pmatrix}$

20) $\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&1&2\\0&-7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&5\\2&2&-4\\8&6&-2\end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix}3&3&4\\5&4&3\\0&-7&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&2\\4&5&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix}1&-6&2\\2&0&4\\0&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&2\\5&1&1\\3&-2&2\end{pmatrix}$

23) $\begin{pmatrix}5&0&4\\2&-3&3\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&-3\\2&0&1\\5&0&5\end{pmatrix}$

24) $\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&5\\6&1&4\\-2&0&3\end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix}4&4&0\\-1&1&3\\5&6&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5&4\\0&3&2\\1&0&-2\end{pmatrix}$

26) $\begin{pmatrix}2&3&1\\0&4&-1\\5&6&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4&2\\0&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

27) $\begin{pmatrix}2&4&3\\1&0&2\\5&0&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&5\\7&1&2\\1&1&-3\end{pmatrix}$

28) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&3&0\\-6&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&5&0\\6&1&2\\1&5&4\end{pmatrix}$

29) $\begin{pmatrix}2&-3&1\\0&4&6\\5&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&6\\5&-1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$

30) $\begin{pmatrix}5&-1&1\\2&0&2\\3&7&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-1&2\\4&-3&0\\0&1&5\end{pmatrix}$

2. Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -8 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

23) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

24) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

27) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

28) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

29) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

30) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

3. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

16) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

25) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

26) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

27) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

22) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

28) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

29) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

24) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

30) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

4. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки:

1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

12) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

16) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

22) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

24) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

25) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

26) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

27) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

28) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

29) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

30) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

5. Найти матрицу, обратную данной, и сделать проверку:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

20) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

24) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

26) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

28) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

29) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

30) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. Решить систему и найти фундаментальную систему решений (фср):

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -15x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 9x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

29) $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

30) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

7. Решить систему a) методом Крамера,
b) методом обратной матрицы,
c) методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 += 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 += -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

20) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

24) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

28) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$

29) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ 30) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

1.15. Решение типового расчёта

1. Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -12-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Решение.

1) Найдём произведение

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2+6 & 4+0-3 & -6+1-9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9-2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ 6 & 1 & -14 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим данное произведение. В результате получим матрицу размер 2×1:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+0-3 \\ -4-2-6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

1) Вычислим определитель двумя способами: a) по правилу Саррюса; b) используя свойства определителей и теорему о разложении определителя по элементам строки:

a) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 4 + 3 - 24 + 0 = -9,$

b) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & -1 & -3 \\ 11 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} =$
$= \ -9.$

2) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -2 \begin{vmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(9+10) = -38.$

3. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки.

Решение.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} =$

$= a \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + c \cdot (-1)^{1+3} M_{13} =$

$= a \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 14a + 5b - 4c.$

4. Найти матрицу обратную данной и сделать проверку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Обратная матрица A^{-1} матрицы А имеет вид

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 -$ $- \ 4 \cdot 3 = 12 \neq 0$, т. е. матрица А является обратимой, т. е. существует матрица A^{-1}.

Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}=14, A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-8, A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-2, A_{12}=$$
$$=-\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5, A_{22}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2, A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=$$
$$=-5, A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4, A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4,$$
$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

Тогда: $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}14 & -8 & -2\\ 5 & -2 & -5\\ -4 & 4 & 4\end{pmatrix}$

Проверка.

Найдём.

$$A^{-1}A=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}14 & -8 & -2\\ 5 & -2 & -5\\ -4 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Аналогично $AA^{-1}=E$. Следовательно, обратная матрица найдена верно.

5. Решить систему и найти фундаментальную систему решений (фср):

$$\begin{cases}5x_1+x_2+5x_3-2x_4=0,\\ 10x_1-5x_2-4x_3-4x_4=0,\\ 15x_1-4x_2+x_3-6x_4=0.\end{cases}$$

Решение.

Выпишем матрицу данной однородной системы уравнений и с помощью эквивалентных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 5 & -2\\ 10 & -5 & -4 & -4\\ 15 & -4 & 1 & -6\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2),\ (-3)\\ +\\ +\end{matrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 5 & -2\\ 0 & -7 & -14 & 0\\ 0 & -7 & -14 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 5 & -2\\ 0 & -7 & -14 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad rang A=2<n=5.$$

Следовательно, система имеет бесконечное множество решений; главных неизвестных – два ($n-r=2$): x_1 и x_2; свободных неизвестных – два: x_3,x_4. Найдём множество решений системы:

$$\begin{cases}5x_1+x_2+5x_3-2x_4=0,\\ x_2+2x_3=0,\end{cases}$$

x_2=$-2x_3$,

x_1 =$\frac{1}{5}$($-x_2 - 5x_3 + 2x_4$)= $\frac{1}{5}$ ($2x_3 - 5x_3 + 2x_4$)+$\frac{1}{5}$($-3x_3 + 2x_4$),

$$\text{т. е.} \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4, \\ \quad x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4; -2x_3, x_3, x_4,\right) \middle| x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}\right\}$.

6. Решить систему а) методом Крамера,

b) методом обратной матрицы,

c) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

а) Вычислим определители матрицы A системы и матриц A_i, получаемых из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов, где i = 1,2,3.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-6} & \mathbf{-15} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{-3}\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-21} \end{vmatrix} =141,$$

$$|\boldsymbol{A_1}| = \begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{3}\begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} =$$

$$=3\begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{17} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{17} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} =282,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 12 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 141,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -21 \\ 0 & 12 & -20 \end{vmatrix} = 141.$$

Тогда согласно формулам Крамера имеем: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 2$,
$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 1$, $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 1$.

Ответ: $\{(2,1,1)\}$.

b) Запишем данную систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $AX=B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Выше установлено, что $|A| = 141$, т. е. $|A| \neq 0$. Следовательно, существует матрица A^{-1}; вычислим её. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = 44$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 20$, $A_{21} = 26$, $A_{22} = -21$ $A_{23} = -1$, $A_{31} = 15$, $A_{32} = 15$, $A_{33} = -6$ и тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 44 & 26 & 15 \\ -3 & -21 & 15 \\ 20 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$ Так как $X = A^{-1}B$, то

$$X = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 44 & 26 & 15 \\ -3 & -21 & 15 \\ 20 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 282 \\ 141 \\ 141 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Ответ: $\{(2,1,1)\}$.

c) Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & -6 & -15 & -21 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \\ 0 & 0 & -141 & -141 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Полученная матрица является ступенчатой; $rang\, A = rang\, \widetilde{A} = 3 = n$ (n − число неизвестных). Система имеет единственное решение. Восстановим систему уравнений по последней матрице.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ \quad x_2 - 21x_3 = -20, \\ \qquad x_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2,1,1)\}$.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы

2.1.1. Основные понятия

Различают скалярные величины (масса, объём, площадь, длина и т. д.), которые определяются своим численным значением, и векторные величины (сила, скорость, ускорение и т. д.), определяемые не только своим числовым значением, но и направлением. Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Векторы обозначаются либо так: $\overline{AB}$ (точка A – начало вектора, точка B – конец вектора), либо так: $\bar{a}$. Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$(или $|\bar{a}|$).

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают, длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется его ортом и обозначается $\overline{a^0}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\bar{a}||\bar{b}$.

Если $\bar{a}||\bar{b}$, то либо они направлены одинаково и тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются сонаправленными и обозначаются как $\bar{a} \uparrow\uparrow b$, либо векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлены противоположно и обозначаются как $\bar{a} \ \uparrow\downarrow \ \bar{b}$.

Заметим, что нулевой вектор $\bar{0}$ считается коллинеарными любому вектору $\bar{a}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными ($\bar{a} = \bar{b}$) ,если они сонаправленные ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$) и имеют одинаковые длины ($|\bar{a}| = |\bar{b}|$). Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора поместить в любую точку пространства.

Векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.

2.1.2. Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами – сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные векторы и точка 0 – произвольная точка. Построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$ называется <u>суммой векторов</u> $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$.

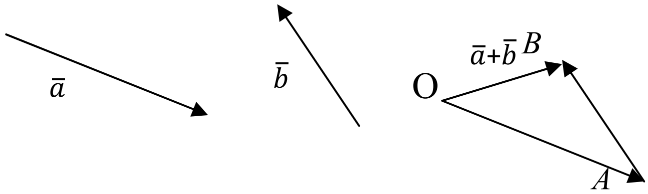


Рис. 2.1.

Это правило сложения векторов называется <u>правилом треугольника</u>.

Сумму неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно построить по <u>правилу параллелограмма</u> (рис. 2.2).

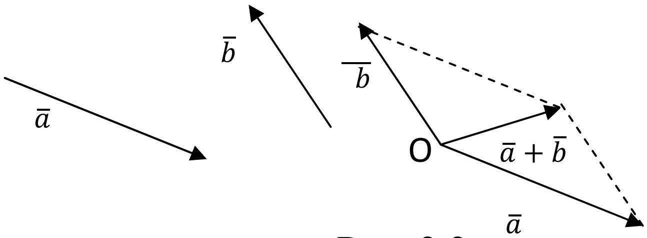


Рис. 2.2.

Сумму произвольного числа векторов $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \cdots + \overline{a_k}$ можно построить по следующему правилу: приложим вектор $\overline{a_2}$ к концу вектора $\overline{a_1}$, вектор $\overline{a_3}$ – к концу вектора $\overline{a_2}$ и т. д.; тогда сумма $к$ векторов будет представлять собой вектор с началом, совпадающим с началом вектора $\overline{a_1}$, и концом, совпадающим с концам вектора $\overline{a_k}$.

На рис. 2.3 показано сложение трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

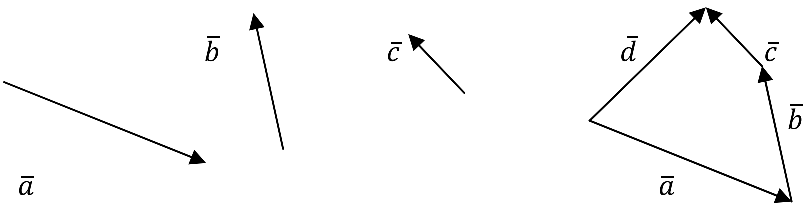


Рис. 2.3.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис 2.4).

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$

Рис. 2.4.

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая – разностью (рис. 2.5).

Рис. 2.5.

Можно рассматривать разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как сумму векторов $\bar{a}$ и $(-\bar{b})$, противоположного вектору $\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

<u>Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число α</u> называется вектор $\alpha\bar{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\alpha\bar{a}|=|\alpha||\bar{a}|$,
2) $(\overline{\alpha a})||\bar{a}$,
3) $\alpha\bar{a}, \bar{a}$ – векторы сонаправленные, если α>0, и противоположно, если α<0 (если α=0, то $\alpha\bar{a}=\bar{0}$).

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\bar{a}+\bar{b}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$,
2) a+$(\bar{b}+\bar{c})$=$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$,
3) $\bar{a}+\bar{0}=a$,
4) $\bar{a}+(-1)\bar{a}=\bar{0}$,
5) $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$,
6) $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$,
7) $(\alpha\beta)\bar{a}=\alpha(\beta\bar{a})$,
8) $1\cdot\bar{a}=1\cdot\bar{a}$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

2.1.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l.

<u>Проекцией (ортогональной проекцией) точки</u> A на ось l называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l (рис. 2.6).

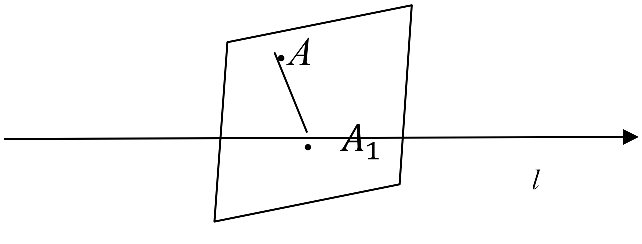


Рис. 2.6.

Заметим, что если точка A лежит на оси l, то A=A_1.

Пусть $\overline{AB} \neq \overline{0}$ – ненулевой произвольный вектор, A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно вектора $\overline{AB}$ (рис. 2.7).

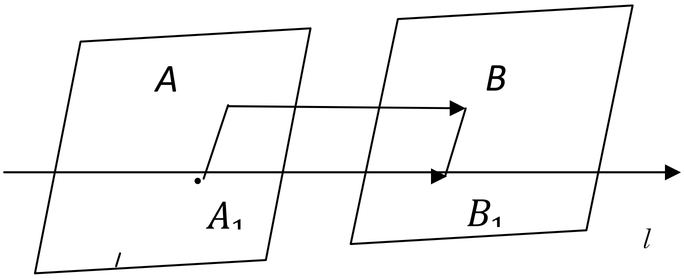


Рис. 2.7.

Проекцией (ортогональной проекцией) вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{AB}$ и ось l одинаково направлены; отрицательное число $(-|\overline{A_1B_1}|)$, если вектор $\overline{AB}$ и ось l противоположно направлены; число 0, если A_1=B_1 (т. е. $\overline{AB} = \overline{0}$). Обозначение: пр$_l\,\overline{AB}$.

Углом φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) между векторами $\bar{a}$ и осью l (или между двумя векторами) называется угол кратчайшего поворота оси до совмещения её направления с направлением вектора (аналогично определяется угол между двумя векторами) (рис. 2.8).

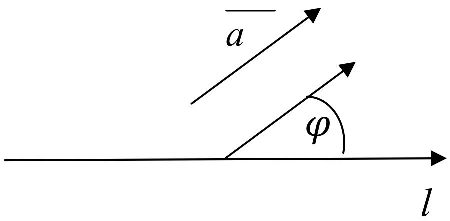


Рис. 2.8.

Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l находится по формуле

$$\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|cos\varphi. \qquad (2.1)$$

Отметим основные свойства проекций:

1) если $\bar{a} = \bar{b}$, то пр$_l\,\bar{a}$=пр$_l\bar{b}$,
2) пр$_l$ $(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})$= пр$_l\bar{a}$+ пр$_l\bar{b}$ − пр$_l\bar{c}$,
3) пр$_l(\alpha\bar{a}) = \alpha$ пр$_l\,\bar{a}$.

2.1.4. Разложение вектора по базису. Длина вектора. Направляющие косинусы

Пусть $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ – единичные векторы осей прямоугольной системы координат *Oxyz*. Эти векторы образуют базис. Поэтому любой вектор $\bar{a}$ пространства можно разложить по этому базису:

$$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_k\bar{k}, \qquad (2.2)$$

где a_x, a_y, a_k – координаты вектора $\bar{a}$. Они представляют собой проекции вектора на оси координат.

Если даны начало вектора $A(x_A, y_A, z_A)$, и конец $B(x_B, y_B, z_B)$, то имеем:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{\imath} + (y_B - y_A)\bar{\jmath} + (z_B - z_A)\bar{k} \qquad (2.3)$$

или $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

В частном случае, когда начало вектора $\overline{OB}$ находится в начале координат, то имеем:

$$\overline{OB} = x_B\bar{\imath} + y_B\bar{\jmath} + z_B\bar{k} = (x_B, y_B, z_B), \qquad (2.4)$$

т. е. в этом случае координаты вектора совпадают с координатами конца вектора. Заметим, что вектор $\overline{OB}$ называется радиусом - вектором точки B.

Длина вектора $\overline{AB}$ находится по формуле

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ . \qquad (2.5)$$

В частности, длина вектора $\overline{OB}$:

$$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}\ . \qquad (2.6)$$

Пример 1.1.

1) Пусть точки $A(-2,3,0)$ и $B(1,2,-1)$ – начало и конец соответственно вектора $\overline{AB}$. Найти длину векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$. Используем формулы (2.5) и (2.6).

$$\overline{AB} = (1 - (-2); 2 - 3; -1 - 0) = (3, -1, -1),$$
$$\overline{OA} = (2,3,0);\ \overline{OB} = (1,2,-1).$$

Тогда

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},$$
$$|\overline{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13},$$
$$|\overline{OB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $|\overline{AB}| = \sqrt{11}, |\overline{OA}| = \sqrt{13}, |\overline{OB}| = \sqrt{6}$.

2.1.5. Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или иначе $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$.

Тогда

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm a_x)\bar{\imath} + (a_y \pm b_y)\bar{\jmath} + (a_z \pm b_z)\bar{k} = (a_x \pm b_x, a_y \pm \\ \pm b_y, a_z \pm b_z), \quad (2.7)$$

$$\alpha a = \alpha a_x\bar{\imath} + \alpha a_y\bar{\jmath} + \alpha a_z\bar{k} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z). \quad (2.8)$$

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$ (т. е. равны у них соответствующие координаты).

Итак, $$\bar{a} = \bar{b} <=> \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \quad (2.9)$$

Пример 2.2.

Найти координаты вектора $-4\bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1,2,-3), \bar{b} =$
$= (4,0,1)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $(-4)\bar{a}$и $3\bar{b}$: $-4\bar{a} = (4,-8,12)$,
$3\bar{b} = (12,0,3)$, тогда $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (4 + 12, -8 + 0,12 + 3) =$
$= (16,-8,15)$.

Ответ: $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (16,-8,15)$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (т.е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}, \lambda -$ некоторое число) тогда и только тогда, когда

$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, т. е.

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} <=> \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.10)$$

2.2. Скалярное произведение векторов

2.2.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi, \qquad (2.11)$$

где φ=$(\bar{a}\hat{}\bar{b})$.

Другие обозначения скалярного произведения: $\bar{a} \cdot \bar{b}, (\bar{a}, \bar{b})$.

Формулу (2.11) можно переписать иначе, если учесть, что $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|cos\varphi, \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|cos\varphi$. (см. рис. 2.9):

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

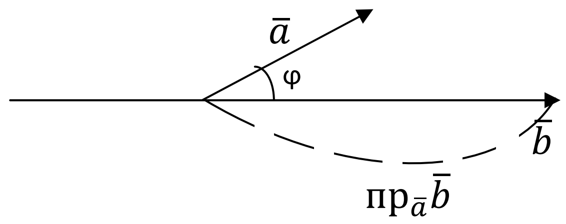


Рис. 2.9.

2.2.2. Свойства скалярного произведения

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$,
2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b})$,
3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$,
4) $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$,
5) ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b} = 0$, т. е.

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} <=> \bar{a}\bar{b} = 0. \qquad (2.12)$$

Заметим, что $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример 2.3.

Найти длину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$, $(\bar{a}\hat{}\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 5\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b})} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 20\bar{a}\bar{b} + 25|\bar{b}|^2} =$
$\sqrt{4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 \cdot 4cos\frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4^2} = \sqrt{36 + 120 + 400} = \sqrt{556} =$
$= 2\sqrt{139}$.

Ответ: $|\bar{c}| = 2\sqrt{139}$.

2.2.3. Выражения скалярного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}$ в прямоугольной системе координат Oxyz заданы своими координатами: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$(т. е. $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$). Тогда $\bar{a}\bar{b} = (a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k})(b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}) = a_xb_x\bar{\imath}\bar{\imath} + a_xb_y\bar{\imath}\bar{\jmath} + a_xb_z\bar{\imath}\bar{k} + a_yb_x\bar{\jmath}\bar{\imath} + a_yb_y\bar{\jmath}\bar{\jmath} + a_yb_z\bar{\jmath}\bar{k} + a_zb_x\bar{k}\bar{\imath} + a_zb_y\bar{k}\bar{\jmath} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} = a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$, т. е.

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (2.13)$$

Угол между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно найти из соотношения

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.14)$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые, то необходимое и достаточное условия перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следующие:

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} <=> a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0. \qquad (2.15)$$

Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:

$$cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{\imath}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$cos\beta = \frac{\bar{a}\bar{\jmath}}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad (2.16)$$

$$cos\gamma = \frac{\bar{a}\bar{k}}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Величины $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Пример 2.4.

Даны точки $A(-5,1,6)$, $B(1,4,3)$, $C(2,1,3)$. Найти: 1) длину вектора $\bar{a} = 4\overline{AB} + 3\overline{BC}$; 2) скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b} = \overline{BC}$; 3) проекцию вектора $\bar{c} = \bar{b}$ на вектор $\bar{d} = \overline{AB}$.

Решение.

1) Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

$\overline{AB} = (1-(-5), 4-1, 3-6 = (6, 4, -3)$; $\overline{BC} = (2-1, 1-4, 3-3) =$
$= (1, -3, 0)$.

2) $\bar{a}\bar{b} = (4\overline{AB} + 3\overline{BC}) \cdot \overline{BC} = (4 \cdot 6 + 3 \cdot 1, 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-3), 4 \cdot (-3) + +3 \cdot 0)(1, -3, 0) = (27, 3, -12)(1, -3, 0) = 27 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + (-12) \cdot 0 = = 18$.

3) Так как $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{\bar{c}\bar{d}}{|\bar{d}|}, \bar{d} = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, то $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{-3}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\bar{a} = (27,\ 3, -12), \bar{a}\bar{b} = 18,\ \text{пр}_{\bar{d}}\,\bar{c} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.2.4. **Приложение скалярного произведения** (работа постоянной силы)

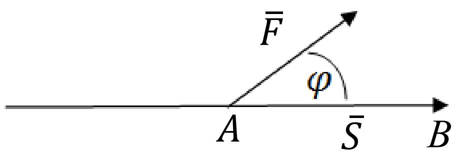


Рис. 2.10.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (рис. 2.10) Известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна $A = \bar{F} \cdot \bar{S}cos\varphi$, т. е. $A = \bar{F}\bar{S}$. Следовательно, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 2.5.

Вычислить работу, произведённую силой $\bar{F} = (3,2,4)$, если точка её приложения перемещается, прямолинейно из положения $A(2,-4,4)$ в положение $B(4,2,3)$. Под каким углом к $\overline{AB}$ направлена сила $\bar{F}$?

Решение.

Найдём $\bar{S} = \overline{AB} = (2,6,-1)$ тогда $A = \bar{F}\bar{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) =$
$= 14$ (ед. работы) и $cos\,\varphi = \frac{\bar{F}\bar{S}}{|\bar{F}||\bar{S}|} = \frac{14}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{4+36+1}} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} =$
$= \sqrt{\frac{14}{41}}, \varphi = arccos\sqrt{\frac{14}{41}}$.

Ответ: A=14, $\varphi = arccos\sqrt{\frac{14}{41}}$.

2.3. Векторное произведение векторов

2.3.1. Определение векторного произведения

Векторным <u>произведением</u> вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ и удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) длина вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведённых к общему началу, т. е. $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = |\bar{a}||\bar{b}|sin\varphi$, где $\varphi = (\bar{a}, \hat{}\bar{b})$,

2) вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$,

3) вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ относительно векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлен так же, как ось Оz направлена относительно оси Оx и Оy (рис. 2.11).

Другое обозначение векторного произведения: $[\bar{a}, \bar{b}]$.

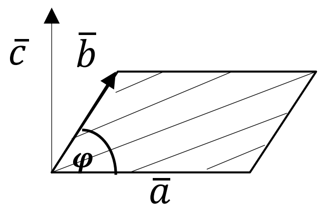


Рис. 2.11.

Условие 3) можно выразить и так: векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ образуют правую тройку векторов, т. е. эти векторы (приведённые к общему началу) располагаются в порядке нумерации аналогично большому, указательному и среднему пальцам правой руки («правило правой руки»).

1. Свойства векторного произведения:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$,

2) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$, где $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

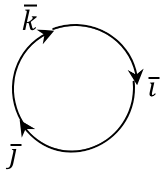
3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,

4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

2.3.2. Выражение векторного произведения векторов через координаты векторов

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ в прямоугольной системе координат:

$\times$	$\bar{\imath}$	$\bar{\jmath}$	$\bar{k}$
$\bar{\imath}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$\overline{-\jmath}$
$\bar{\jmath}$	$\overline{-k}$	$\bar{0}$	$\bar{\imath}$
$\bar{k}$	$\bar{\jmath}$	$\overline{-\imath}$	$\bar{0}$



При определении знака удобно пользоваться схемой:

Если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадаем – третий вектор берётся со знаком «минус».

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ разложены по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$:

$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \quad \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\imath} + b_z\bar{k}.$

Найдём векторное произведение векторов, используя при этом свойства векторного произведения и таблицу:

$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}) = a_xb_x(\bar{\imath} \times \bar{\imath}) +$
$+a_xb_y(\bar{\imath} \times \bar{\jmath}) + a_xb_z(\bar{\imath} \times \bar{k}) + a_yb_x(\bar{\jmath} \times \bar{\imath}) + a_yb_y(\bar{\jmath} \times \bar{\jmath}) + a_yb_z(\bar{\jmath} + \bar{k}) +$
$+a_zb_x(\bar{k} + \bar{\imath}) + a_zb_y(\bar{k} + \bar{\jmath}) + a_zb_z(\bar{k} + \bar{k}) = 0 + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{\jmath} -$
$-a_yb_x\bar{k} + \bar{0} + a_yb_z\bar{c} + a_zb_x\bar{\jmath} - a_zb_y\bar{\imath} + \bar{0} = (a_yb_z - a_zb_y)\bar{\imath} - (a_xb_z -$
$-a_zb_x)\bar{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}.$

Таким образом,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k} \qquad (2.15)$$

или

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.16)$$

2.3.3. Приложения

1) Установление коллинеарности векторов.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые. Тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны ($\bar{a}||\bar{b}$) в том и только в том случае, когда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} <=> \frac{a_x}{a_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} <=> \bar{a}||\bar{b}.$$

2) Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a}\times\bar{b}| =$
$= |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}^\wedge\bar{b}) = S\text{пар.} = 2S\,\Delta$

3) Определения момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и О − некоторая точка пространства (рис.2. 12).

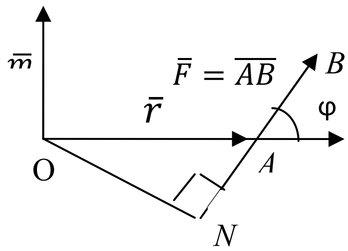


Рис. 2.12.

Из физики известно, что моментом силы F относительно точки О называется вектор $\bar{m}$, который проходит через точку О и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки О, A, B,

2) численно равен произведению силы на плечо $|\bar{m}| = |\bar{F}|\cdot$
$|\bar{r}|sin\varphi = |\bar{F}||\overline{OA}|\sin(\overline{F}, ^\wedge\overline{OA})$,

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}, \overline{AB}$.

Следовательно,

$$\bar{m} = \overline{OA}\times\bar{F}\ . \qquad (2.17)$$

Пример 2.6.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах
$\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n},\ \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n},$
где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ − единичные векторы, образующие угол 30° .

Решение.

1) Найдём векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$.

$\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{m}+2\bar{n})\times(2\bar{m}+\bar{n}) = 2(\bar{m}\times\bar{m}) + 4(\bar{n}\times\bar{m}) + \bar{m}\times\bar{n} +$
$+2(\bar{n}+\bar{n}) = 2\cdot 0 + 4(\bar{n}\times\bar{m}) - (\bar{n}\times\bar{m}) + 20 = 3(\bar{n}\times\bar{m}) =$
$= 3|\bar{n}||\bar{m}|sin30^{\circ} = 3\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

2) Sпар.=$|\bar{a}\times\bar{b}|$= $\frac{3}{2}$.

Ответ: Sпар.=$\frac{3}{2}$.

Пример 2.7.

Даны точки A(2,−1,2), B(1,2,−1) и C(3,2,1). Найти площадь треугольника ABC.

Решение.

1) Найдём векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (1-2, 2-(-1), -1-2) = (-1,3,-3)$$
$$\overline{AC} = (3-2, 2-(-1), 1-2) = (1,3,-1)$$

2) Вычислим векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} =$$
$$= 6\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 6\bar{k}.$$

3) $\mathrm{S}\Delta_{ABC} = \frac{1}{2} S\text{пар.} = \frac{1}{2}\left|6\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 6\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-6)^2} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{84} = \sqrt{21}$ (кв. ед.).

Ответ: $\mathrm{S}\Delta = \sqrt{21}$ кв. ед.

Пример 2.8.

Даны векторы $\bar{a} = (2,3,5)$ и $\bar{b} = (1,2,1)$. Найти координаты вектора, перпендикулярного векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение.

Найдём векторное произведение векторов данных векторов:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = -7\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}.$$

Согласно определению векторного произведения, вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Ответ: $\bar{c} = (-7,3,1)$.

Пример 2.9.

Сила $\bar{F} = (2, -4,5)$ приложена к точке $A(4,-2,3)$. Определить момент этой силы относительно точки O(3,2,-1).

Решение.

Найдём вектор $\overline{OA}$:

$$\overline{OA} = (4-3; 2-(-2);\ -1-3) = (1,4,-4).$$

Тогда момент $\bar{m}$ силы $\bar{F}$ относительно точки O согласно формуле (2.17) равен:

$$\bar{m} = \bar{F} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \bar{k} =$$
$$= -4\bar{\imath} + 13\bar{\jmath} + 12\bar{k} = (-4, 13, 12).$$

Ответ: $\bar{m} = (-4, 13, 12)$.

2.4. Смешанное произведение векторов

2.4.1. Определение

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $(\bar{a} \times \bar{b})\,\bar{c}$. Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b})c$. Построим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (рис. 2.13).

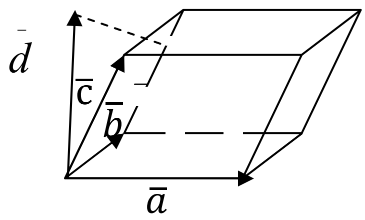


Рис. 2.13.

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{d}\bar{c} = |\bar{d}|\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}|\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = S\text{пар} \cdot H$,
где $H -$ высота параллелепипеда и

$$\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = \begin{cases} H, \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} - \text{правая}, \\ -H, \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} - \text{левая}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = S\text{пар}\,(\pm H) = \pm V, \qquad (2.18)$$

где V – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ (если эти векторы приведены к общему началу и некомпланарны, т. е. не лежат в одной плоскости).

2.4.2. Свойства смешанного произведения

1) Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$; это позволяет обозначать смешанное произведение символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$,

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$ (при перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак),

3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$,

4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

2.4.3. Выражение смешанного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ разложены по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ и $\bar{k}$: $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + +a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{\imath} + c_y\bar{\jmath} + c_z\bar{k}$.

Найдём смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$abc=(\bar{a} \times \bar{b})\,\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\left(c_x\bar{\imath} + c_y\bar{\jmath} + c_z\bar{k}\right) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{\imath} - \right.$$

$$\left. -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}\right)\left(c_x\bar{\imath} + c_y\bar{\jmath} + c_z\bar{k}\right) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x -$$

$$-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z.$$

Таким образом,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z. \qquad (2.19)$$

или

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

2.4.4. Приложения смешанного произведения

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая.

2) Определение объёмов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен:

$$V=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|. \qquad (2.21)$$

А объём треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, равен:

$$V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|. \qquad (2.22)$$

Пример 2.10.

Показать, что точки $A(2, -1, -2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$ и $D(5,0, -6)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

1) Найдём векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = \big(1-2, 2-(-1), 1-(-2)\big) = (-1, 3, 2),$$
$$\overline{AC} = \big(2-2{,}3-(-1), 0-(-2)\big) = (0, 4, 2),$$
$$\overline{AD} = \big(5-2{,}0-(-1), -6-(-2)\big) = (3, 1, -4).$$

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда на основании свойства 4) смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$ лежат в одной плоскости, а значит, и точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Пример 2.11.

Найти объём треугольной пирамиды, если даны координаты её вершин $A(1, -1, -1)$, $B(0,5,4)$, $C(2, -3, -4)$, $D(5, -4, -6)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-1, 6, 5), \qquad \overline{AC} = (1, -2, -3), \qquad \overline{AD} = (4, -3, -5).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 21 & 15 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 6\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объём параллелепипеда, построенного на трёх рассматриваемых векторах, равен: V=|−18|=18, а искомый объём треугольной пирамиды *ABCD* равен: Vпир.$= \frac{1}{3}V = \frac{18}{5} = 3$ куб. ед.

Ответ: Vпир=3 куб. ед.

Пример 2.12.

Найти смешанное произведение векторов $\bar{a} = (1{,}0, -1), \bar{b} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + + \bar{k}, \quad \bar{c} = (2, 3, 4)$.

Решение.

Напишем координаты вектора $\bar{b}$: $\bar{b} = (1{,}1{,}1)$.

Вычислим смешанное произведение данных векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что такое вектор? Каковы линейные операции над векторами?
2. Верно ли, что равные векторы – векторы, имеющие равные длины?
3. Что значит – разложить вектор по базису?
4. Что определяют для вектора коэффициенты в разложении его по базису?
5. Каковы условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов?
6. Каковы геометрические приложения векторного (смешанного) произведения векторов ?
7. Каковы физические приложения скалярного (векторного, смешанного) произведения?
8. Что произойдёт со скалярным (векторным) произведением векторов, если поменять местами сомножители?
9. Что произойдёт со смешанным произведением векторов, если поменять местами два каких − нибудь вектора (два соседних вектора)?

2.6. Тест «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\overline{AB} = (5, \alpha, \beta)$и $\overline{AC} = (2, -4{,}8)$. Если точки A,B и C лежат на одной прямой, то сумма $\alpha + \beta$ равна:

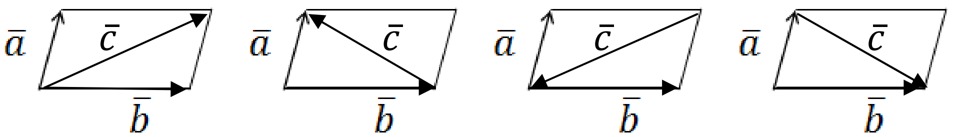
1) 8 2) 10 3) 20 4) 30.

2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, если:

1) $\bar{a} \| \bar{b}, |\bar{a}| = |\bar{b}|$ 2)$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}, |\bar{a}| - |\bar{b}| = 0$ 3) $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}, |\bar{a}| = |\bar{b}|$.

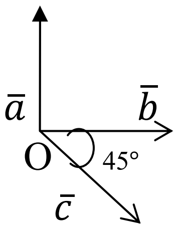
3. Установить соответствие между рисунками a) −d) и векторами 1) −4).

1) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ 2)$\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ 3)$\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$ 4)$\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$



a) b) c) d)

Из точки О выходят три единичных компланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ как указано на рисунке. Тогда длина вектора $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ равна: 1) 3 2)1 3)0 4)$\sqrt{3}$



4. Единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2, -6,3)$ и одинаково с ним направленный, имеет координаты: 1)$\overline{a_1} = (1, -1,1)$ 2)$\overline{a_2} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$ 3)$\overline{a_3} = \left(\frac{2}{49}, -\frac{6}{49}, \frac{3}{49}\right)$ 4)$\overline{a_4} = (0, -1,0)$.

5. Дан вектор $\bar{a} = (4, -12, 2)$. Известно, что $|\bar{a}| = 13$. Тогда координата *z* векторы $\bar{a}$ равна:

1)9 2)3 3) − 3 4)3 или − 3

6. Даны точки $A(5, -4,2)$, $B(5, -7,8)$, $C(2,2, -7)$, $D(-1,5,\alpha)$. При каком значении α векторы $\overline{OB}$ и $\overline{CA}$ коллинеарны: 1) 26 2) 0 3) − 1 4) − 10.

7. При каком значении α точки $A(0, -2,5)$, $B(-4,4,3)$, $C(3,4, -1)$, $D(5,1,\alpha)$ являются вершинами трапеции: 1)1 2)0 3) − 1 4) ни при каком.

8. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется неравенство $\bar{a}\bar{b} \le 0$. Тогда угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяет условию:

1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 3) $\varphi \ge \frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

9. При каком значении α вектор $2\bar{a} + \alpha\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{b} - \bar{a}$, если $\bar{a}(2, -1,0)$, $\bar{b}(4,3,1)$

1) − 2 2)0 3) $-\frac{16}{21}$ 4) $\frac{16}{21}$

10. Какой угол образуют единичные векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$, если известно, что векторы $\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2}$ и $5\boldsymbol{e_1} - 4\boldsymbol{e_2}$ взаимно перпендикулярны?

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{6}$

11. Поставьте в соответствие каждому выражению a) −d) его Место для формулы.числовое значение, если

$a)\ |\bar{a}\bar{b}|$ $b)\ (\bar{a} + \bar{b})^2$ $c)(\bar{a} - \bar{b})^2$ $d)\ |[\bar{a}\bar{b}]|$

1)19, 2) − 3, 3) $3\sqrt{3}$, 4) 7.

12. Векторы $\bar{a} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}, \bar{b} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath}, \bar{c} = m\bar{\imath} + 2\bar{k}$ компланарны, если m равна: 1)2, 2)4, 3)0, 4) − 4.

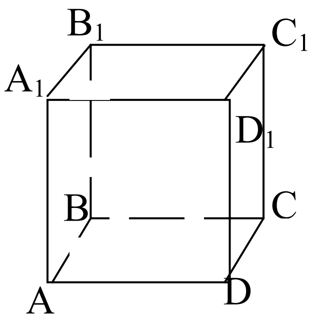
13. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие $\bar{a}\bar{b} = $
$= |\bar{a} \times \bar{b}|$.

Тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен: 1)0, 2) $\frac{\pi}{4}$, 3) $\frac{\pi}{2}$, 4)π.

14. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется равенство $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. Какое из следующих утверждений неверно? $1)\bar{a} \| \bar{b}$ $\quad 2)$векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы $\quad 3)\ \exists \alpha \in R: \bar{a} = \alpha \bar{b}$, $4)\bar{a} \perp \bar{b}$.

15. Пусть $|\bar{a} \times \bar{b}| = 1$. Чему равно тогда $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$. $1) -2 \quad 2)0 \quad 3)2 \quad 4)$ нельзя определить.

16. Если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} -$ единичные векторы, идущие из центра равностороннего треугольника в его вершины A,B,C, то $|(\bar{c} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{b})|$ равен: $1) -1 \quad 2)0 \quad 3)1 \quad 4)\sqrt{3}$.



17. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – единичный куб. Установить соответствие между векторными произведениями a)-d) и их значениями 1) −4). $a)\ \overline{AB} \times \overline{AD}, b)\ \overline{C_1C} \times \overline{C_1D_1}, c)\overline{A_1C_1} \times \overline{BD}, d)\overline{A_1C_1} \times \overline{AC}$. $1)\ \bar{0},\ 2)\overline{A_1A},\ 3)\ \overline{B_1C},\ 4) -2\overline{A_1A}$.

18. В треугольной призме $ABC_1B_1C_1$ векторы $\overline{AB} = (0,1,-1)$и $\overline{AC} = (2,-1,4)$ определяют основание, а вектор $\overline{A_1A} = (-3,2,2)$ направлен по боковому ребру. Тогда объём призмы равен: $1)17 \quad 2)\frac{17}{2} \quad 3)\ 34 \quad 4)\frac{17}{4}$.

19. Векторы $\bar{a} = (-2, 2\alpha, -1), \bar{b} = (1, -1, 2)$ взаимно перпендикулярны, если α равно:

$1) -2 \quad 2) -1 \quad 3)1 \quad 4)2$.

20. Угол между векторами $\bar{a} = -\bar{\imath} + \bar{\jmath}, \bar{b} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ равен:

$$1)\frac{\pi}{4} \quad 2)\frac{\pi}{3} \quad 3)\frac{3}{4}\pi \quad 4)\frac{\pi}{6}.$$

21. Векторное произведение векторов $\bar{a} = (4,2,\alpha), \bar{b} = (2,\beta,3)$ равно $\bar{0}$, если:

$$1)\alpha = 3, \beta = 1 \quad 2)\alpha = 1, \beta = 1 \quad 3)\ \alpha = 6, \beta = 1 \quad 4)\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 1.$$

22. Среди векторов $\bar{a} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \bar{b} = \sqrt{2}\bar{\imath} - \sqrt{2}\bar{k}, \bar{c} = \sqrt{5}\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 4\bar{k}$ наибольшую длину имеет вектор ...

23. В треугольнике ABC: $\overline{AB} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}, \overline{AC} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}$. Проекция $\text{пр}_{\overline{AB}}\overline{AC}$ равна:

$1)\frac{8}{3} \quad 2)\frac{4}{3} \quad 3)\frac{1}{8} \quad 4) -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

24. Среди формул для вычисления длины вектора $\bar{a} = (x, y, z)$.

$1)|\bar{a}| = \bar{a}^2 \quad 2)\ |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3) $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$ 4) $|a| = \sqrt{\bar{a}^2 \cos\frac{\pi}{2}}$ верными являются…

25. Даны две тройки векторов:

1) $\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{k},\ \bar{b} = \bar{\jmath} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{\jmath} + 5\bar{k}$ 2) $\bar{a} = \bar{k}, \bar{b} = \bar{\imath} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{\imath} - \bar{\jmath}$. Определить, образуют ли они правую или левую тройки.

26. Даны векторы $\overline{a_1} = (2,1,1), \overline{a_2} = (2,0,1), \overline{a_3} = (-2,2,0), \overline{a_4} = (1,1,1)$. С увеличением их длин векторы расположены в порядке…

27. Угол между векторами $\bar{a} = (\alpha, -1,2)$ и $\bar{b} = (\alpha, 1,1)$ равен $\frac{\pi}{2}$, если действительное число α равно…

28. Даны векторы $\bar{a} = (-1, -1,0)$ и $\bar{b} = (1,1,1)$. Длина $\bar{a} - \bar{b}$ больше длины вектора $\bar{a} + \bar{b}$ в α раз, где α равно ...

29. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если: 1) $\bar{a} = \alpha\bar{b}, \alpha -$ число, 2) $\bar{a}\bar{b} = 0$, 3) $\bar{a}\bar{b} \neq |\bar{a}||\bar{b}|$, 4) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$, 5) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. Среди перечисленных выражений верными являются…

2.7. Задачи

2.1. Даны векторы: $\bar{a} = (2,1)$; $\bar{b} = (1, -2), \bar{c} = (-1,0)$. Построить векторы $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{m} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, найти длину векторов $\bar{p}, \bar{m}$ и разложить вектор $\bar{p}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а вектор $\bar{m}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

2.2. Даны вершины треугольника A (−7,4) B(−5,2), C(6, −3). Найти координаты середин всех сторон треугольника.

2.3. Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого A(3, −7) и B(−1,4).

2.4. Даны две противоположные вершины квадрата A(3,5) и C(1, −3). Вычислить площадь квадрата.

2.5. Для векторов $\bar{a} = (4,3), \bar{b} = (2, -1)$:

1) Вычислить длину вектора $\bar{a}$ и орт вектора $\bar{b}$,

2) Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и проекцию $\bar{a}$ на $\bar{b}$,

3) Определить, при каком α векторы $\bar{b}$ и $\bar{m} = (\alpha, 4)$ коллинеарны.

2.6. Для векторов $\bar{a} = (7; 1)$ и $\bar{b} = (3,4)$:

1) найти векторы $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}, \bar{\alpha} = \bar{a} - \bar{b}, \bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$ и записать их разложения по ортам (единичным вектором) $\bar{\imath}$ и $\bar{\jmath}$,

2) вычислить скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$,

3) найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и проекцию вектора $\bar{a}$ на $\bar{b}$,

4) определить длину вектора $\bar{m}$ и его направляющие косинусы.

2.7. Вычислить, является ли треугольник с вершинами A(2,2), B(1,6),

$C(7,\ -1)$ прямоугольным, остроугольным или тупоугольным. Вычислить угол при вершине A.

2.8. Показать, что четырёхугольник с вершинами $A(1,3)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$ и $D(-1,4)$ является параллелограммом, и найти точку пересечения его диагоналей.

2.9. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(3,\ -3)$, $B(-1,1)$, $C(1,6)$. Определить координаты вершины D и длины диагонали параллелограмма.

2.10. Показать, что точки $A(3,\ -5)$, $B(-2,\ -7)$ и $C(18,1)$ лежат на одной прямой.

2.11. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$, если $\bar{a} \perp \bar{b}$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=12$.

2.12. При каких значениях α векторы $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ являются ортогональными, если $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$.

2.13. Дано разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}$: $\bar{c}=16\bar{\imath}-15\bar{\jmath}+$ $+12\bar{k}$. Определить разложение по тому же базису вектора $\bar{\alpha}$, противоположно направленного вектору $\bar{c}$, при условии, что $|\bar{\alpha}|=75$.

2.14. При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=-2\bar{\imath}+3\bar{\jmath}+\beta\bar{k}$ и $\bar{b}=\alpha\bar{\imath}-6\bar{\jmath}+2\bar{k}$: 1) коллинеарны, 2)ортогональны.

2.15. Даны векторы $\bar{a}=(3,-2,4), \bar{b}=(6,-3,2), \bar{c}=(2,1,-1)$. Вычислить:

1) $\bar{a}\bar{b}$
2) $\bar{a}\times\bar{b}$
3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
4) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$, $(2\bar{a}-3\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b})$
5) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})\,\bar{c}$.

2.16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$ и $\bar{b}=2\bar{m}+\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ – единичные векторы, образующие угол 30°,
2) $\bar{a}=6\bar{\imath}+3\bar{\jmath}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{\imath}-2\bar{\jmath}+6\bar{k}$.

2.17. Вычислить площадь треугольника с вершинами A, B и C и найти высоту BH, если:

1) $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$
2) $A(1,-2,8)$, $B(0,0,4)$, $C(6,2,0)$.

2.18. Установить компланарность векторов:

1) $\bar{a}=(2,3,-1), \bar{b}=(1,-1,3), \bar{c}=(1,9,-11)$,
2) $\bar{a}=3\bar{\imath}-2\bar{\jmath}+\bar{k}, \bar{b}=2\bar{\imath}+\bar{\jmath}+2\bar{k}, \bar{c}=3\bar{\imath}-\bar{\jmath}-2\bar{k}$.

2.19. Показать, что точки $A(1,2,\ -1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$

лежат в одной плоскости.

2.20. Вершины тетраэдра, находятся в точках $A(2,3,1)$, $B(4,1,\ -2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,\ -4,3)$. Найти объём тетраэдра и высоту, опущенную из вершины D.

2.8. Ответы

2.1. $2\bar{a} = (2,-3)$, $|\bar{p}| = \sqrt{13}$, $\bar{p} = \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{4}{3}\overline{b},$

$\bar{m} = (0,1)$, $|\bar{m}| = 1, \bar{m} = -\bar{a} + 2\bar{c}$.

2.2. $(-6,3)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2.3. 137.

2.4. 34.

2.5. 1) $|\bar{a}|=5$, $\bar{b} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 2)$\bar{a}\bar{b} = 5$ $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \sqrt{5}$, 3)$\alpha = -8$.

2.6. 1) $\bar{c} = 10\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$, $\bar{d} = 4\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}, \bar{m} = 5\bar{\imath} - 10\bar{\jmath}$,

2) $\bar{a}\bar{b} = 25$, 3) $\varphi = 45$, $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = 5$, 4) $|\bar{m}| = 5\sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2.7. Тупоугольный, $\angle A = 135°$.

2.8. $O(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$.

2.9. $D(5,2)$, $AC=\sqrt{85}$, $BD = \sqrt{37}$.

2.11. $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| = 13$.

2.12. $\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

2.13. $\bar{a} = -48\bar{\imath} + 45\bar{\jmath} - 36\bar{k}$.

2.14. 1)$\alpha=4$, $\beta=-1$ 2)$\alpha=c$, $\beta=c+9$, где C – любое действительное число.

2.15. 1) $\bar{a}\bar{b} = 38$ 2)$\bar{a} \times \bar{b} = (8,16,0)$ 3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 32$ 4) -184; $(56,112,0)$ 5) 224.

2.16. 1)1,5 2) 49.

2.17. 1) $S=24,5$, $BH=7$ 2)$S=7\sqrt{5}$, $BH=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

2.18. 1) компланарны 2) не компланарны.

2.20. $V=\frac{154}{3}$, $DO = H = 11$.

2.9. Типовой расчёт «Векторная алгебра»

1. Найти вектор $\bar{m}$

№ вар.	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{m}$
1	(2; −1;0)	(1;1;3)	(0;2;1)	$\overline{2a} + 2\bar{b} - 3\bar{c}$

Окончание

№ вар.	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{m}$
2	(0;1;3)	(−1;2;3)	(−2;3;5)	$\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}$
3	(−2;1;3)	(0; −1;1)	(4;1; −9)	$2\bar{a}+3\bar{b}+\bar{c}$
4	(−1;3;0)	(1;0;1)	(−3; −2;3)	$2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}$
5	(2;0;3)	(−1;2;2)	(0;1; −1)	$2\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}$
6	(−2;3;1)	(−1;3;1)	(0;3;1)	$-3\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}$
7	(1; −1;4)	(−1; −2;0)	(2;2; −2)	$2\bar{a}+3\bar{b}+4\bar{c}$
8	(1;3;2)	(0; −1;3)	(2;3;0)	$4\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}$
9	(1;4; −2)	(2;3; −1)	(4;0; −1)	$-3\bar{a}+4\bar{b}+\bar{c}$
10	(2;0; −1)	(0;1; −1)	(5;4; −7)	$3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c}$
11	(1;0;2)	(−6;3; −1)	(0;6; −5)	$5\bar{a}-\overline{6b}+3\bar{c}$
12	(2; −2;3)	(2; −2; −5)	(3;0;2)	$-\bar{a}+\bar{b}+4\bar{c}$
13	(0; −1; −2)	(3; −1;1)	(2; −7;1)	$2\bar{a}+5\bar{b}-\bar{c}$
14	(4;3;0)	(0;3;4)	(1; −3;2)	$3\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}$
15	(−3; −2;1)	(1;0; −1)	(4; −6;5)	$-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$
16	(4; −2; −1)	(3;5;1)	(1; −1; −1)	$4\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}$
17	(8;2;0)	(3;2;2)	(9;2;3)	$\bar{a}-3\bar{b}+2\bar{c}$
18	(−6;2;2)	(1;−1;0)	(4;3;1)	$-\bar{a}+4\bar{b}+2\bar{c}$
19	(5;0; −2)	(0;2;3)	(−1;1;0)	$3\bar{a}+2\bar{b}-4\bar{c}$
20	(4; −1;1)	(0;1;2)	(4;1;0)	$4\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}$
21	(−3;1; −1)	(−2; −2;3)	(2;1;0)	$-5\bar{a}+3\bar{b}+\bar{c}$
22	(−1; −3;1)	(−2;1; −1)	(3;1;0)	$2\bar{a}+\bar{b}-4\bar{c}$
23	(−3;1; −2)	(−3; −2;2)	(3; −2;0)	$2\bar{a}-4\bar{b}+5\bar{c}$
24	(−4; −2;1)	(−2;3;0)	(−2;3; −1)	$4\bar{a}+3\bar{b}-5\bar{c}$
25	(5;2;3)	(−3;1;0)	(−2; −1;1)	$5\bar{a}-3\bar{b}+4\bar{c}$
26	(−2;0;4)	(−3;0; −1)	(3; −2;2)	$-3\bar{a}+5\bar{b}+\bar{c}$
27	(−1;3; −2)	(−3;2;0)	(−3; −1;1)	$-4\bar{a}+\bar{b}+3\bar{c}$
28	(1;5;2)	(1; −3; −2)	(0;3;1)	$2\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}$
29	(−2;4;0)	(−2;3;3)	(3;2;1)	$\bar{a}+2\bar{b}-4\bar{c}$
30	(1; −2;3)	(−3;1;1)	(−1; −2;0)	$2\bar{a}+\bar{b}+4\bar{c}$

2. Найти значения неизвестных, при которых векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны:

№ вар.	$\bar{a}$	$\bar{b}$
1	$-2\bar{i}+3\bar{j}+z\bar{k}$	$x\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$
2	$-3\bar{i}+7\bar{j}+\bar{k}$	$2\bar{i}-y\bar{j}+z\bar{k}$
3	$2\bar{i}+y\bar{j}+\bar{k}$	$4\bar{i}+\bar{j}-z\bar{k}$
4	$7\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$-14\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$
5	$2\bar{i}+y\bar{j}-\bar{k}$	$\bar{i}+3\bar{j}-z\bar{k}$
6	$x\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$	$3\bar{i}+8\bar{j}+z\bar{k}$
7	$2\bar{i}-8\bar{j}+z\bar{k}$	$x\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$
8	$3\bar{i}-y\bar{j}+3\bar{k}$	$x\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$
9	$\bar{i}-y\bar{j}+2\bar{k}$	$x\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$
10	$3\bar{i}+y\bar{j}-\bar{k}$	$x\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$
11	$6\bar{i}-y\bar{j}+5\bar{k}$	$3\bar{i}-2\bar{j}+z\bar{k}$
12	$2\bar{i}+4\bar{j}-z\bar{k}$	$\bar{i}-y\bar{j}-3\bar{k}$
13	$5\bar{i}+4\bar{j}-z\bar{k}$	$x\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$
14	$-3\bar{i}-y\bar{j}+\bar{k}$	$-\bar{i}-\bar{j}+z\bar{k}$
15	$-2\bar{i}+3\bar{j}-z\bar{k}$	$x\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$
16	$x\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$	$\bar{i}-y\bar{j}+3\bar{k}$
17	$3\bar{i}-2\bar{j}+z\bar{k}$	$-\bar{i}+y\bar{j}+3\bar{k}$
18	$-\bar{i}+y\bar{j}-3\bar{k}$	$-x\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$
19	$-\bar{i}+3\bar{j}+z\bar{k}$	$2\bar{i}-y\bar{j}+6\bar{k}$
20	$-4\bar{i}+3\bar{j}+z\bar{k}$	$\bar{i}+y\bar{j}-\bar{k}$
21	$\bar{i}-4\bar{j}+z\bar{k}$	$-x\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$
22	$2\bar{i}-3\bar{j}+z\bar{k}$	$4\bar{i}+y\bar{j}-\bar{k}$
23	$x\bar{i}+6\bar{j}+z\bar{k}$	$2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$
24	$4\bar{i}+y\bar{j}-3\bar{k}$	$2\bar{i}-3\bar{j}+z\bar{k}$
25	$-x\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$	$3\bar{i}+2\bar{j}-z\bar{k}$
26	$x\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$	$-2\bar{i}+y\bar{j}+\bar{k}$
27	$-\bar{i}+y\bar{j}-5\bar{k}$	$x\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$
28	$x\bar{i}+2\bar{j}+8\bar{k}$	$-\bar{i}+y\bar{j}-4\bar{k}$
29	$-2\bar{i}+y\bar{j}-4\bar{k}$	$3\bar{i}-5\bar{j}+z\bar{k}$
30	$4\bar{i}-5\bar{j}-z\bar{k}$	$-8\bar{i}+y\bar{j}-\bar{k}$

3. Даны координаты точек A,B,C. Найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и косинус угла между векторами:

№ вар.	A	B	C
1	(3;0;1)	(−1; −2;3)	(-1;-2;0)
2	(−2; −1;3)	(−1;2;3)	(-2;3;2)
3	(−2;1;3)	(4; −1;8)	(0; −1; −3)
4	(7;2; −5)	(6;0; −3)	(3;2;7)
5	(−5;0;2)	(−4;4;3)	(7;9; −2)
6	(−5;1;0)	(6; −3; −1)	(4;3;7)
7	(8;0;1)	(−1;5;4)	(0;4; −2)
8	(9;9; −2)	(7;11; −4)	(5;6; −1)
9	(4; −3;0)	(10;5; −4)	(2;2; −3)
10	(−6;1; −3)	(−4;4; −2)	(3;2;1)
11	(−5;4; −1)	(10;5; −4)	(0;4; −3)
12	(4;5; −3)	(0;7;3)	(2; −6; −2)
13	(4; −5;0)	(1; −1;1)	(4;5;3)
14	(−4; −6;1)	(5; −2;0)	(1; −3;7)
15	(−5;4;0)	(6;0;3)	(4;8; −1)
16	(1; −4;3)	(5;0; −1)	(−2;0;6)
17	(4; −5;1)	(4;1; −7)	(0;1;7)
18	(−1;3; −2)	(4;9; −1)	(1;3;5)
19	(−7;2; −2)	(−9; −3;2)	(0;1; −4)
20	(−5; −1;1)	(3; −1;8)	(−3;4;4)
21	(0;3; −3)	(−7;5;1)	(1;1;6)
22	(−4;0;8)	(7;1;9)	(−6; −1;0)
23	(5;1; −1)	(8; −3;1)	(−3;0;1)
24	(0;5;2)	(−1;0;3)	(−4;4;1)
25	(−1; −8;0)	(−6;1;1)	(−4;0; −1)
26	(5;0;5)	(−4;1;0)	(−3;2;7)
27	(−5;1; −2)	(−9;2;2)	(−3;0; −1)
28	(7;7;2)	(−2;4; −4)	(0;3;6)
29	(−8;3;3)	(−3; −9;0)	(4;2; −2)
30	(−7; −1;5)	(−4;3;8)	(−3;2;1)

4. Используя векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найти площадь треугольника ABC:

№ вар.	A	B	C
1	$(-2;-3;1)$	$(0;1;2)$	$(3;1;2)$
2	$(3;-2;1)$	$(1;0;-1)$	$(3;2;-2)$
3	$(-1;-2;0)$	$(-1;0;1)$	$(2;-2;3)$
4	$(-1;0;-2)$	$(-1;1;0)$	$(2;3;-2)$
5	$(3;2;0)$	$(3;2;-1)$	$(-2;1;0)$
6	$(-2;0;-1)$	$(0;1;-1)$	$(3;-1;-2)$
7	$(0;-1;-2)$	$(3;-1;1)$	$(3;-2;2)$
8	$(1;2;3)$	$(-3;-1;0)$	$(-2;-1;1)$
9	$(0;2;3)$	$(-1;2;3)$	$(-2;3;2)$
10	$(3;-2;1)$	$(0;3;-2)$	$(3;2;-2)$
11	$(2;0;3)$	$(-1;3;2)$	$(1;0;2)$
12	$(1;3;-2)$	$(1;3;-1)$	$(1;0;3)$
13	$(3;0;2)$	$(2;3;-1)$	$(0;-2;3)$
14	$(-2;-3;0)$	$(-3;1;-2)$	$(0;-3;2)$
15	$(-2;0;3)$	$(-3;1;1)$	$(3;-2;1)$
16	$(-2;3;1)$	$(-1;3;1)$	$(0;3;1)$
17	$(0;3;2)$	$(2;-1;3)$	$(1;3;0)$
18	$(1;-2;3)$	$(1;-1;3)$	$(3;0;-2)$
19	$(-2;0;-1)$	$(0;1;3)$	$(-2;-3;1)$
20	$(-3;0;-2)$	$(-3;-2;1)$	$(3;-2;0)$
21	$(-3;2;0)$	$(-1;3;-2)$	$(-2;3;-1)$
22	$(-2;1;3)$	$(0;-1;1)$	$(2;1;3)$
23	$(-3;0;1)$	$(-2;2;3)$	$(-2;1;0)$
24	$(0;-2;-1)$	$(3;1;-1)$	$(2;0;1)$
25	$(1;2;3)$	$(-3;1;-2)$	$(-3;-1;1)$
26	$(-1;-3;1)$	$(-2;1;-1)$	$(3;1;0)$
27	$(3;1;-2)$	$(1;-1;0)$	$(-1;-3;0)$
28	$(-2;-1;3)$	$(-2;3;0)$	$(3;2;1)$
29	$(-1;-2;1)$	$(-2;-3;0)$	$(-2;3;-1)$
30	$(3;0;1)$	$(-1;-2;3)$	$(-1;-2;0)$

5. Исследовать компланарность векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$:

№ вар.	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
1	$(1;2;3)$	$(2;0;4)$	$(2;-4;2)$
2	$(4;4;-3)$	$(1;0;2)$	$(3;4;-5)$
3	$(2;1;0)$	$(-1;3;1)$	$(5;1;2)$
4	$(5;3;-2)$	$(-5;-3;0)$	$(5;3;-1)$
5	$(3;-1;0)$	$(3;1;2)$	$(2;5;4)$
6	$(-2;2;-2)$	$(0;4;-3)$	$(-2;-2;1)$
7	$(0;2;1)$	$(1;1;5)$	$(3;-2;4)$
8	$(2;-2;-2)$	$(4;-1;-1)$	$(-1;-1;-1)$
9	$(0;2;1)$	$(3;0;3)$	$(-3;2;-2)$
10	$(-3;3;-1)$	$(-1;0;-1)$	$(-2;3;0)$
11	$(-1;1;2)$	$(2;0;3)$	$(1;5;2)$
12	$(0;1;2)$	$(3;3;0)$	$(-3;-2;2)$
13	$(2;-1;1)$	$(1;0;-2)$	$(1;-4;3)$
14	$(2;1;2)$	$(3;-1;0)$	$(2;3;2)$
15	$(2;1;0)$	$(5;-1;1)$	$(-3;2;1)$
16	$(-1;3;-3)$	$(-3;-2;1)$	$(2;5;-4)$
17	$(-4;-2;2)$	$(-4;-2;-1)$	$(2;1;-1)$
18	$(-1;2;2)$	$(3;1;0)$	$(5;4;3)$
19	$(1;-4;2)$	$(-2;0;-2)$	$(3;-4;4)$
20	$(3;5;-3)$	$(0;4;-3)$	$(-3;1;0)$
21	$(0;4;-3)$	$(5;3;-2)$	$(-5;1;-1)$
22	$(0;-1;3)$	$(3;1;2)$	$(4;1;5)$
23	$(-2;-1;-2)$	$(-4;-4;-1)$	$(0;2;-3)$
24	$(0;4;2)$	$(1;1;3)$	$(2;-1;3)$
25	$(-1;1;-4)$	$(5;-2;-2)$	$(-6;3;-2)$
26	$(2;1;3)$	$(1;3;2)$	$(0;4;-1)$
27	$(1;2;4)$	$(5;1;1)$	$(-4;1;3)$
28	$(2;4;1)$	$(5;4;1)$	$(-1;4;1)$
29	$(2;4;2)$	$(1;3;1)$	$(0;-1;2)$
30	$(3;4;2)$	$(2;2;-1)$	$(1;2;3)$

2.10. Решение типового варианта

1. Найти вектор $\overline{m} = -3\overline{a} + 2\overline{b} + 4\overline{c}$, если $\overline{a} = (2,0,-3)$, $\overline{b} = (-3,1,-1), \overline{c} = (-1,-2,0)$.

Решение.

Вычислим вектор $\overline{m}$, используя правила умножения вектора на число и сложения (вычитания) векторов, заданных своими координатами:

$$\overline{m} = -3\overline{a} + 2\overline{b} + 4\overline{c} = -3(2,0,-3) + 2(-3,1,-1) + 4(-1,-2,0) = \\ = (-6,0,9) + (-6,2,-2) + (-4,-8,0) = (-16,-6,7).$$

Ответ: $\overline{m} = (-16,-6,7)$.

2. Найти значения неизвестных, при которых $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\overline{a} = -3\overline{\imath} + 2\overline{\jmath} + z\overline{k}, \overline{b} = x\overline{\imath} - 4\overline{\jmath} + 2\overline{k}$.

Решение.

Неизвестные z и x найдём, используя условия коллинеарности векторов:

$\overline{a}||\overline{b} <=> \frac{-3}{x} = \frac{2}{-4} = \frac{z}{2}$. Так как $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, то $x = 6$ и $z = -1$.

Ответ: $x = 6, z = -1$.

3. Даны координаты трёх точек $A(2,0,1)$, $B(2,1,-3)$, $C(-1,-3,0)$. Найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и косинус угла между векторами.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$$\overline{AB} = (2-2, 1-0, -3-1) = (0,1,-4), \overline{AC} = (-1-2, -3-0, 0-1) = \\ = (-3,-3,-1).$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC} = 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-1) = 0 - 3 + 4 = 1.$$

Найдём косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{323}}.$$

Ответ: $\overline{AB}\ \overline{AC} = 1, \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{323}}$.

4. Используя векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найти площадь треугольника ABC, если $A(-2,0,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(3,1,2)$.

Решение.

$$\overline{AB} = (1-2), 0-0, -2-1 = (3,0,-1),$$

$$\overline{AC} = (3-(-2), 1-0, 2-(-1)) = (5,1,3).$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ 3 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\bar{\imath}-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}\bar{\jmath}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}\bar{k}=$$
$$=\bar{\imath}-14\bar{\jmath}+3\bar{k}.$$

Окончательно имеем: $S_{\Delta\,ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-14)^2+3^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{206}$ (кв. ед.).

Ответ: $S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{206}$ кв. ед.

5. Исследовать компланарность векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, если
$$\bar{a}=(1,1,1),\bar{b}=(1,2,2),\bar{c}=(-1,2,-1).$$

Решение.

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны, если их смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно нулю. Вычислим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$
т. е. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не являются компланарными.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой

3.1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

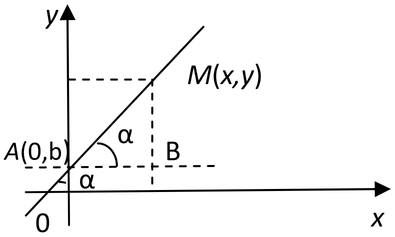


Рис. 3.1.

Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* задана прямая *l*, не параллельная оси *Oy*. Её положение вполне определяется ординатой в точки пересечения прямой *l* с осью *Oy* и углом α между положительным направлением оси *Ox* и прямой *l* (рис. 3.1). Обозначим через α угол между прямыми *l* и $AB: \alpha = \angle MAB$.

Тогда $tg\ \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = x\ tg\ \alpha + b$ или

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

где $k = tg\alpha$.

Число $k = tg\alpha$ называется <u>угловым коэффициентом прямой</u>, а уравнение (3.1) называется <u>уравнением прямой с угловым коэффициентом.</u>

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки *M(x,y)* прямой *l*, а координаты любой точки *N(x,y),* лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

Частные случаи:

1) если $0 \in l,$ то $b = 0$ и уравнение (3.1) примет вид $y=kx,$

2) если прямая *l* параллельна *Ox,* то $\alpha=0$ и, следовательно, $k=tg\alpha=0$, и уравнение (3.1) примет вид: $y=b,$

3) если прямая параллельна *l* оси *Oy*, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{2}$ не существует, уравнение прямой в этом случае будет иметь вид

$$x=a, \quad (3.2)$$

где *a* – абсцисса точки пересечения прямой *l* с осью *Ox*.

Заметим, что уравнения (3.1) и (3.2) – уравнения первой степени.

3.1.2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно *x* и *y* в общем виде:

$$Ax+By+C=0, \quad (3.3)$$

где $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. *A* и *B* не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если B=0, тогда уравнение (3.3) примет вид $Ax+C$=0, причём $A\neq 0$. Отсюда имеем уравнение $x=-\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(-\frac{C}{A},0)$.

2) Если $B\neq 0$, то из уравнения (3.3) имеем y= $-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\alpha = -\frac{A}{B}$.

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется <u>общим уравнением прямой</u>.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если A=0, то (3.3) примет вид: $y=-\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси Ox,

2) если B=0, то имеем уравнение $x=-\frac{C}{A}$ – уравнение прямой параллельной оси Oy,

3) если C=0, то получаем уравнение $Ax+By$=0 – уравнение прямой, проходящей через точку O(0,0).

3.1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая l проходит через точку M_0 (x_0,y_0), и её направление характеризуется угловым коэффициентом k. Тогда уравнение прямой l можно записать так: $y=kx+b$, где b – пока неизвестная величина.

Так как точка $M_0(x_0,y_0)$ лежит на прямой l, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0=kx_0+b$. Отсюда $b=y_0-kx_0$. Подставив значения b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение $y=kx+y_0-kx_0$, т. е.

$$y- y_0 = k\,(x-x_0). \tag{3.4}$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями k называется уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

3.1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ – точки, лежащие на прямой l. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$, имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k\,(x - x_1), \tag{3.5}$$

где k– пока неизвестный коэффициент. Так как точка $M_2 \epsilon l$, то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5): $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Отсюда имеем: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение (3.5), получим уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.6}$$

где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая b, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Oy: $l \,||\, Oy$, и уравнение прямой l имеет вид: $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая l, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Ox, и её уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрическое уравнения прямой.

Обозначим через $m = x_2 - x_1$, $p = y_2 - y_1$ и введём вектор $\overline{M_1M_2} = (m, p)$. Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p}, \tag{3.7}$$

где вектор $\bar{S} = \overline{M_1M_2} = (m, p)$ – направляющий вектор прямой l. Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением прямой.

Положим в уравнении (3.7) $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p} = t$, где t – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Уравнения (3.8) называют параметрическими уравнениями прямой.

3.1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ – точки пересечения прямой l с осями Ox и Oy соответственно (рис. 3.2).

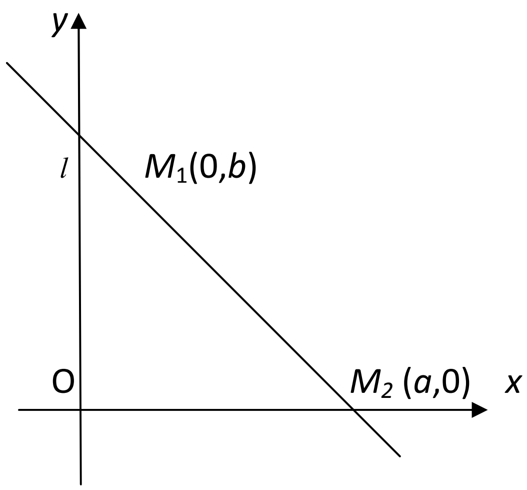


Рис. 3.2.

Тогда уравнение (3.6) примет вид: $\frac{y-o}{b-o}=\frac{x-a}{o-a}$ или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1. \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

3.1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n}=(A,B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x,y)$ и введём в рассмотрение вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$(см. рис. 3.3.). Так как векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\overline{M_0M}=0$:

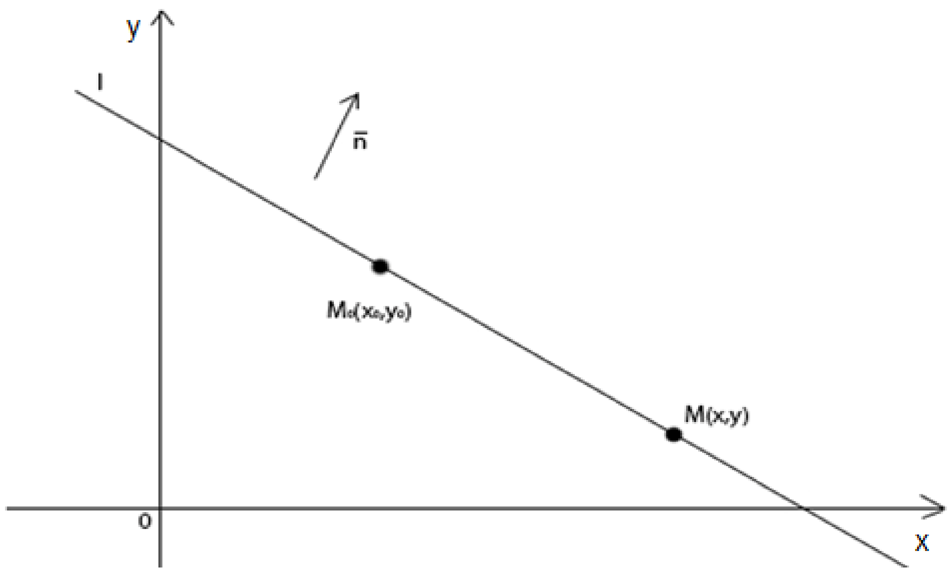


Рис. 3.3.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
Вектор $\overline{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

Уравнение (3.10) можно переписать иначе, а именно, в виде:

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.11)$$

где $C=-Ax_0-By_0$ – свободный член, A и B – координаты нормального вектора.

Уравнение (3.11) есть общее уравнение прямой (см. (3.3)).

Пример 3.1.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,2)$, $B(1,-3)$. Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):
$\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2}$ или $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2}$ – каноническое уравнение прямой; направляющий вектор $\bar{S} = (2, -5)$, откуда имеем: 5x+2y+1=0 – общее уравнение прямой.

Выразим y из общего уравнения прямой: $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{2}$. Из канонического уравнения получим параметрическое уравнение.

Положим $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = t$, t – параметр; имеем следующую систему:
$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -5t + 2 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на (-1) в результате получим: $-5x - 2y = 1$ или $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

3.1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1) Пусть даны две прямые l_1 и l_2 (не параллельные оси Оy). Уравнениями: l_1:$y=k_1x+b_1$ и l_2:$y=k_2x+b_2$ (см. рис. 3.4).

2)

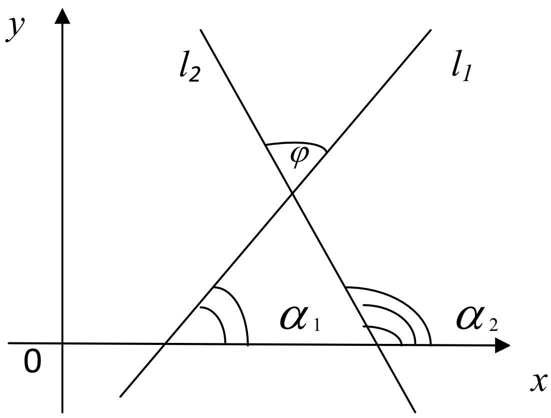


Рис. 3.4.

Найдём угол φ между прямыми l_1 и l_2. По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \alpha_1+\varphi$. Отсюда $\varphi = \alpha_2-\alpha_1$. Так как $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то $tg\varphi = tg(\ \alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tga_2 - tga_2}{1+tga_1 \cdot tga_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Таким образом,

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \tag{3.13}$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают $tg\varphi = \left|\frac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}\right|$.

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

a) $l_1 \| l_2 <=> \varphi = 0 <=> tg\ \varphi = 0 <=> k_2-k_1 = 0 <=> k_1 = k_2$,

b) $l_1 \perp l_2 <=> \varphi = \frac{\pi}{2} <=> ctg\ \varphi = 0 <=> \frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} = 0 <=> k_1k_2 = -1$.

3) Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениям $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

a) $l_1 \| l_2 <=> \pi_1 || \pi_2 <=> \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, где $\overline{n_1} = (A_1, B_2), \overline{n_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно,

b) $l_1 \perp l_2 <=> \overline{n_1}\,\overline{n_2} = 0 <=> A_1A_2+B_1B_2=0$.

Для вычисления угла φ можно воспользоваться формулой

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{3.14}$$

3.1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)$ и прямая l уравнением $Ax+By+C=0$ (см. рис. 3.5).

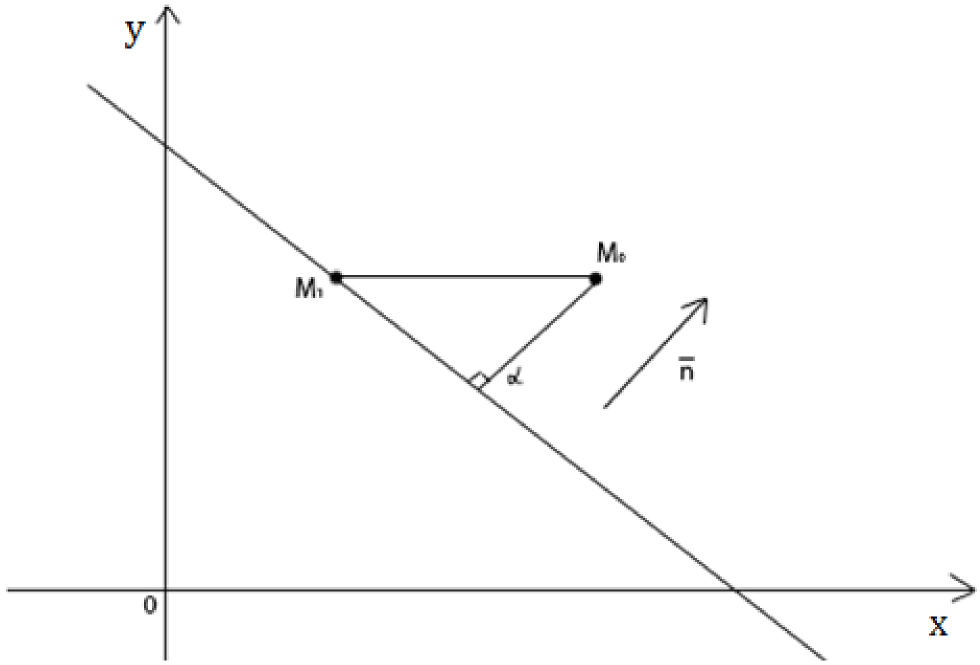


Рис. 3.5.

Найдём расстояние d от точки M_0 до прямой l. Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1,y_1)$ – произвольная точки прямой l на направление нормального вектора $\bar{n}=(A,B)$.Значит,$d=\left|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{MM_0}\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$

$$=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_y-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1,y_1)$ принадлежит прямой l, то $Ax_1+By_1+C=0$ или $C=-Ax_1-By_1$. Поэтому

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.15)$$

Пример 3.2.

Показать, что прямые $2x+5y+3=0$ и $-4x-10y+21=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны: $\frac{2}{-4}=\frac{5}{10}$.

2) Подберём точку, лежащую на прямой l_l:$2x+5y+3=0$. Такой

точкой, например, будет точка $A(1,1)$. Искомым расстоянием будет расстояние точки A до прямой l_2: $-4x+0y+21=0$. Воспользуемся формулой (3.15):

$$d = \frac{|(-4)\cdot 1+(-10)\cdot 1+21|}{\sqrt{(-4)^2+(10)^2}} = \frac{7}{\sqrt{116}} = \frac{7}{2\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

Ответ: $d = \frac{7\sqrt{29}}{58}$.

3.2. Кривые на плоскости

3.2.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы прямоугольная декартова система координат (ПДСК) Оxy и некоторая линия L. Рассмотрим уравнение $F(x,y)=0$ (или $y=f(x)$). Это уравнение называется уравнением линии L в заданной системе координат если:

1) ему удовлетворяют координаты (x,y) любой точки линии L,

2) ему не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащие на линии L.

Уравнения 2-й степени от двух переменных в ПДСК Оxy – уравнения кривых, частными случаями которых являются: эллипс, окружность, гипербола, парабола.

3.2.2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек называется фокусами, есть величина постоянная большая, чем расстояние между фокусами, и равная $2a$ (см. рис. 3.6).

Если ось Оx проходит через фокусы F_1 и F_2 (Оx – фокальная ось), а ось Оy – через середину отрезка $F_1 F_2$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.16)$$

Оси Оx и Оy – оси симметрии эллипса, точка О(0,0) – центр симметрии эллипса. Точки пересечения эллипса с осями координат $(\pm a, 0), (0 \pm b)$ – вершины эллипса, а точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ – фокусы, причём $a \geq b$ и

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (3.17)$$

В частности, если $a=b=r$, то $c=0$, $F_1=F_2=O(0,0)$, и эллипс превращается в окружность $x^2+y^2=r^2$ с центром в точке O(0,0) и радиусом r.

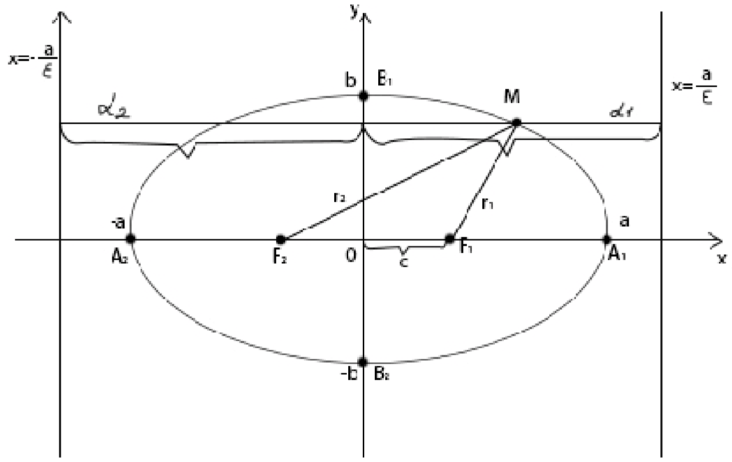


Рис. 3.6.

Числа a и b называются <u>большей и малой полуосью</u> эллипса соответственно.

Заметим, что если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то его уравнение так же имеет вид (3.16), но большая полуось – b, а малая – a, причём $b>a$ и $c^2=b^2-a^2$.

<u>Эксцентриситетом эллипса</u> называется отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon$ $(0\leq\varepsilon<1)$, если $a\geq b$ и $\varepsilon=\frac{c}{b}$, если $b>a$.

Отметим, что чем меньше ε, тем он менее сплющен.

<u>Фокальные радиусы точки</u> $M(x,y)$ эллипса (расстояния от точки M до фокусов) определяются по формулам:

$r_1=|\overline{F_1M}|=a-\varepsilon x, r_2=|\overline{F_2M}|=a+\varepsilon x$ (или $r_1=b-\varepsilon y, r_2=$ $=b+\varepsilon y,$ если $b>a$).

<u>Директрисами эллипса</u> называются прямые, уравнения которых $x=\pm\frac{a}{\varepsilon},$ если $a\geq b$ (или $y=\pm\frac{b}{\varepsilon},$ если $b>a$).

Если d_1и d_2 – расстояния от точки $M(x,y)$ до директрис, то

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}\varepsilon. \qquad (3.18)$$

3.2.3. Гипербола

<u>Гиперболой</u> называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых от двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых <u>фокусами</u>, если величина постоянная, равная $2a$ (см. рис. 3.7).

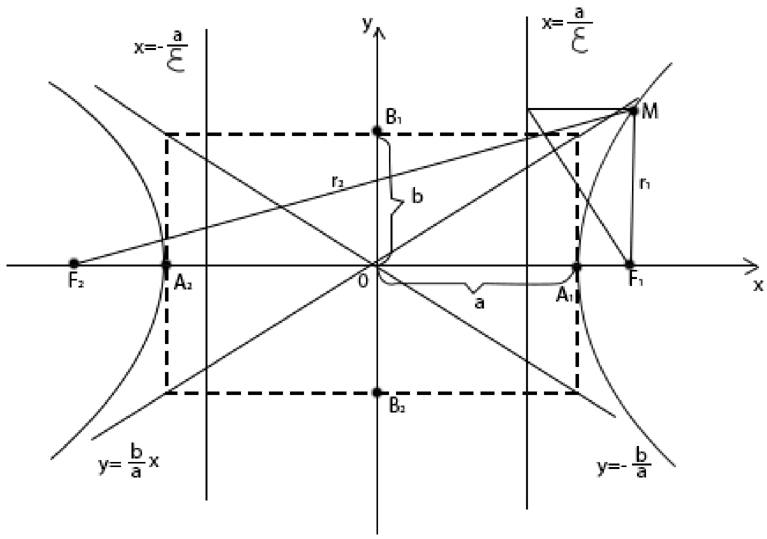


Рис. 3.7.

Если ось Оx проходит через фокусы, а ось Оy – через середину отрезка F_1F_2, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.19)$$

Оси Оx и Оy – оси симметрии гиперболы, точка О(0,0) – центр симметрии гиперболы.

Точки $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ – вершины гиперболы, точки $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы, причём

$$c^2 = a^2 + b^2\ . \qquad (3.20)$$

Число a называется действительной полуосью, а b – мнимой полуосью гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$, причём $\varepsilon > 1$.

Кривую
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (3.21)$$
называют гиперболой, сопряжённой с гиперболой (3.19). У этой гиперболы b – действительная полуось, a – мнимая, причём её фокусы $(0, \pm c)$ лежат на оси Оy и $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Фокальные радиусы точки $M(x,y)$ гиперболы (3.19) определяются по формулам $r_1 = |\varepsilon x - a|, r_2 = |\varepsilon x + a|$ $(r_1 = |b - \varepsilon y|, r_2 = |b + \varepsilon y|$ – для сопряжённой гиперболы).

Директрисами гиперболы (3.19) называются прямые, уравнения которых $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ $\left(y = \pm\frac{b}{\varepsilon}\right.$ для сопряжённой гиперболы (3.21)$\left.\right)$.

Если d_1 и d_2 –расстояния от точки $M(x,y)$ гиперболы до директрис, то для фокальных радиусов гиперболы выполняются равенства: $\frac{r1}{d1} = \frac{r2}{d2} = \varepsilon$.

Асимптотами гиперболы (3.19) и сопряжённой с ней гиперболы (3,21) являются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$.

3.2.4. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, расстояние которых от фиксированной точки F (фокус) равняется расстоянию от фиксированной прямой (директрисы) (см. рис. 3.8).

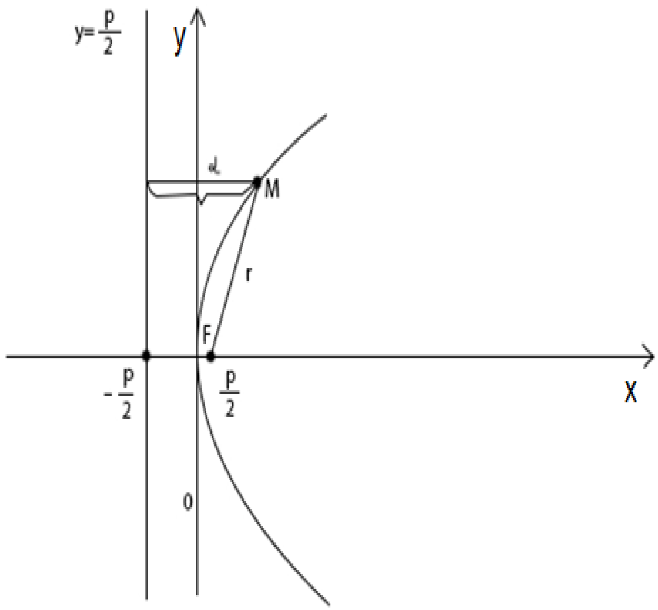


Рис. 3.8.

Пусть ось Оx проходит через фокус F перпендикулярно директрисе, а начало координат лежит посередине между фокусом и директрисой, причём $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, где $p -$ расстояние от фокуса до директрисы. Тогда уравнение директрисы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$. В этом случае каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (3.22)$$

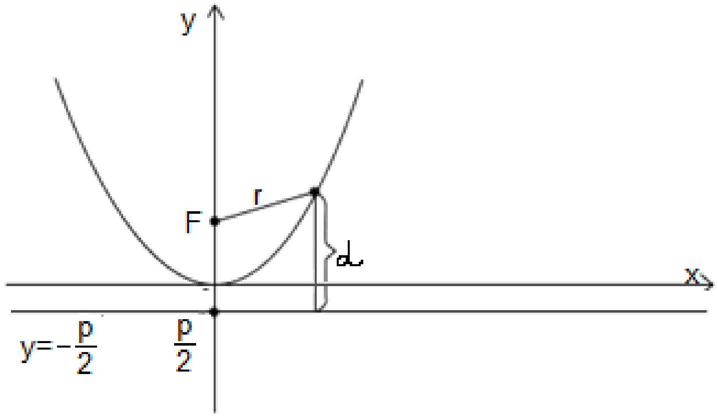


Рис.3.9

Ось Оx (фокальная ось) – ось симметрии параболы (3.22), а точка (0,0) – её вершина.

Эксцентриситет параболы ε=1; фокальный радиус точки M(x,y) параболы (3.22) вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, r=d (d – расстояние точки M до директрисы) и $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Кривая, симметричная параболе (3.22) относительно оси Оy, также – парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$.

Аналогично определяют параболы $x^2 = \pm 2py$, осью симметрии (фокальной осью) которых является ось Oy, причём их фокусы лежат в точке $F(0, \pm\frac{p}{2})$, а уравнение директрисы: $y = \mp\frac{p}{2}$.

Пример 3.3.

Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение.

Разделим обе части данного уравнение на 36, получим каноническое уравнение данного эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Отсюда имеем: большая полуось эллипса a=3, малая b=2, фокусы лежат на оси Оx.

Найдём координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, т. е. координаты фокусов $F_1\left(\sqrt{5}, 0\right), F_2\left(-\sqrt{5}, 0\right)$. Эксцентриситет эллипса определим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$: $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ:$a = 3, b = 2, F_1\left(\sqrt{5}, 0\right), F_2\left(-\sqrt{5}, 0\right), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 3.4.

Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{2}{3}x$ и гипербола проходит через точку $M(8{,}2\sqrt{3})$. Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

Решение.

Так как точка $(8{,}2\sqrt{3})$ лежит на гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению (3.19): $\frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$, кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ (так как у гиперболы её ассимптоты: $y = \pm\frac{2}{3}x$).

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{12}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём: $a = \sqrt{37}, b = \frac{148}{9}$; уравнение гиперболы $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$.

Расстояние между вершинами гиперболы:

$2a = 2\sqrt{37}$, между фокусами: $2c = 2\frac{\sqrt{185}}{3} = \frac{2\sqrt{185}}{3}$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2} =$

$= \sqrt{37 - \frac{148}{9}} = \frac{\sqrt{185}}{3})$.

Ответ: $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1,\ 2a = 2\sqrt{37};\quad 2c = \frac{2\sqrt{185}}{3}$.

Пример 3.5.

Составить уравнение параболы, проходящей через точки O(0,0) и $M(5,-3)$ и симметричной относительно оси Ox; написать уравнение директрис, найти фокальный радиус точки M.

Решение.

Искомое уравнение имеет вид: $y^2 = 2px$; подставив сюда $x = 5$, $y = -3$, получим $9 = 2p\cdot 5$, отсюда $2p = \frac{9}{5}$.

Таким образом, имеем уравнение параболы: $y^2 = \frac{9}{5}x,\ p = \frac{9}{5}$.

Поэтому уравнение директрисы: $x=-\frac{9}{20}$. Фокальный радиус:

$MF = 5 + \frac{9}{20} = \frac{109}{20}$.

Ответ: $y^2 = \frac{9}{5}x, x = -\frac{9}{20}$ – уравнение директрисы,

фокальный радиус: $MF = \frac{109}{20}$.

3.3. Уравнение кривой в полярной системе координат. Параметрические уравнение кривой

3.3.1. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется преобразованием системы координат.

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

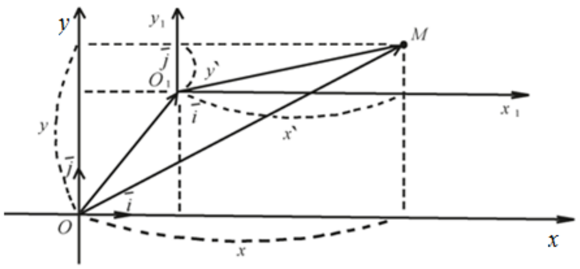


Рис. 3.10.

1. Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат *Oxy*. Под параллельным переносом осей координат понимают переход от системы координат *Oxy* к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты (x_0,y_0) в старой системе координат Оxy, т. е. $O_1(x_0,y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Оxy через (x,y), а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x`,y`)$ (см. рис. 3.10).

Рассмотрим векторы:

$$\overline{OM} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}, \qquad \overline{OO_1} = x_0\bar{\imath} + y_0\bar{\jmath}, \overline{O_1M} = x`\bar{\imath} + y`\bar{\jmath}.$$

Так как $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$, то $x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} = x_0\bar{\imath} + y_0\bar{\jmath} + x`\bar{\imath} + y`\bar{\jmath}$, т. е.

$x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} = (x_0 + x`)\bar{\imath} + (y_0 + y`)\bar{\jmath}$. Следовательно, $\begin{cases} x = x_0 + x` \\ y = y_0 + y` \end{cases}$.

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым $x`$ и $y`$ и наоборот.

2. Поворот осей координат

Под поворотом осей координат понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начала координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Оxy на угол α. Пусть M – произвольная точка плоскости, (x,y) – её координаты в старой системе и $(x`,y`)$ – в новой системе.

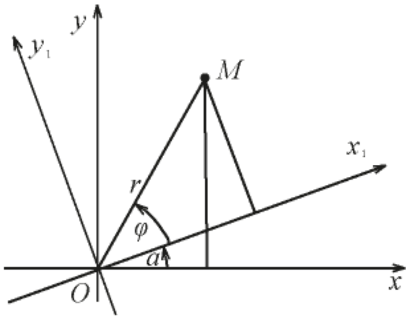


Рис. 3.11.

Введём две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1 (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha+\varphi$ и φ, где φ – полярный угол в новой полярной системе.

По формулам перехода от полярных **координат к прямоугольным имеем:**

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\varphi), \\ y = r\sin(\alpha+\varphi), \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} x = rcos\varphi cos\alpha - rsin\varphi sin\alpha \\ y = rcos\varphi sin\alpha + rsin\varphi cos\alpha \end{cases}.$$

Но $rcos\varphi = x`$ и $rsin\varphi = y`$. Поэтому:

$$\begin{cases} x = x`cos\alpha - y`sin\alpha \\ y = x`sin\alpha + y`cos\alpha \end{cases}.$$

Полученные формулы называются формулами поворота осей. Они позволяют определять старые координаты (x,y) произвольной точки M через новые координаты ($x`,y`$) этой же точки M, и наоборот.

Если новая система координат O$_1x_1y_1$ получена из старой Oxy путём параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α, то путём введения вспомогательной системы O$_1\tilde{x}\tilde{y}$ легко получить формулы:

$$\begin{cases} x = x`cos\alpha - y`sin\alpha + x_{0,} \\ y = x`sin\alpha + y`cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

выражающие старые координаты x и y произвольной точки через её новые координаты $x`$ и $y`$.

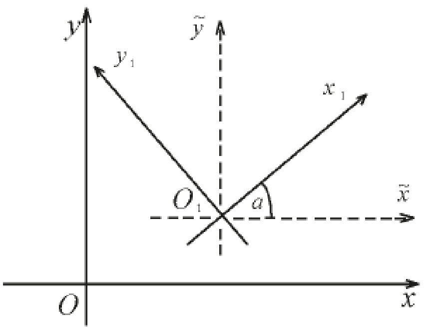


Рис. 3.12.

3.3.2. Уравнение кривой в полярной системе координат. Параметрические уравнения кривой

Линия на плоскости часто задаётся как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса r есть множество всех точек плоскости, удалённых на расстояние r от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел – её координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е.

равенства, связывающего координаты точек линий).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называются такое уравнение $F(x,y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линий заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить, лежит ли точка $A(x_0,y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 3.6.

Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x+y+3=0$?

Решение.

Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2(-2)+1+3=0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, так как $2\cdot 1+1+3\neq 0$.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются. Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение $F(r;\varphi)=0$ называется уравнением данной линии в полярной системе координат, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \tag{3.23}$$

где x и y – координаты произвольной точки $M(x,y)$, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая параметром; параметр t определяет положение точки (x,y) на плоскости.

Например, если $x=t+1$, $y=t^2$, то значению параметра $t=2$ соответствует на плоскости точка (3,4), так как $x=2+1=3$, $y=2^2=4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется параметрическим, а уравнения (3.23) – параметрическими уравнениями линии.

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x,y)=0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t. Например, от уравнений $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ путём подстановки $t=x$ во второе уравнение, легко получить уравнение $y=x^2$ или $y-x^2=0$, т. е. вида $F(x,y)=0$. Однако заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

Линию на плоскости можно задать векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t – скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определённый вектор $\overline{r_0} = \bar{r}(t_0)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ опишет некоторую линию.

На рисунках 3.13−3.21 приведены примеры некоторых кривых и указаны их уравнения.

Векторному уравнению линии $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в системе координат Оxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются уравнениями движения, а линия – траекторией точки, параметр t при этом есть время.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x,y)=0$.

Всякому уравнению вида $F(x,y)=0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (выражение «вообще говоря» означает, что сказанное допускает исключения. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ соответствует не линия, а точка (2,3); уравнению $x^2+y^2+5=0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ).

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти её уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить её форму и свойства.

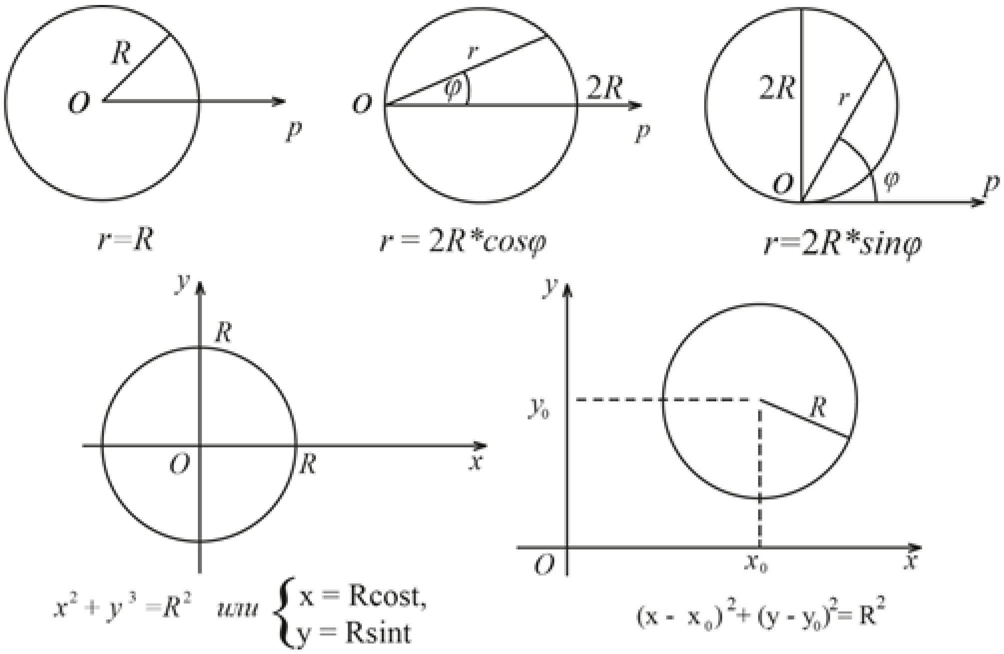


Рис. 3.13. Окружность радиуса R

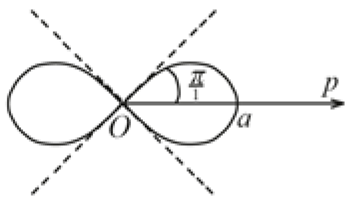


Рис. 3.14. *Лемиската Бернулли*

Сравнение в прямоугольных координатах : (+y) - a (x - y) = 0, a>0; в полярных координатах $r = a * \sqrt{\cos 2\varphi}$

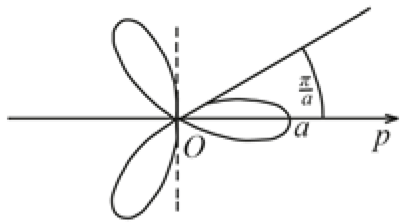


Рис. 3.15. *Трехлепестковая роза*

В полярнх координатах ее уравнение имеет Jвид $r = a*\cos 3\varphi$; где $a>0$.

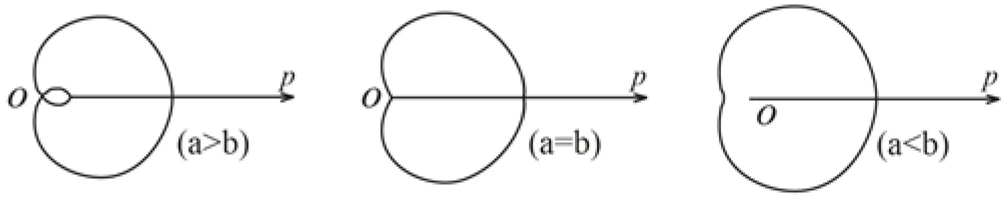


Рис. 3.16. *Улитка Паскаля*

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a\cos\varphi$

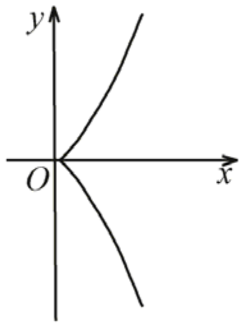


Рис. 3.17. Полукубическая парабола

Уравнение кривой $y^2=x^3$ или $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$

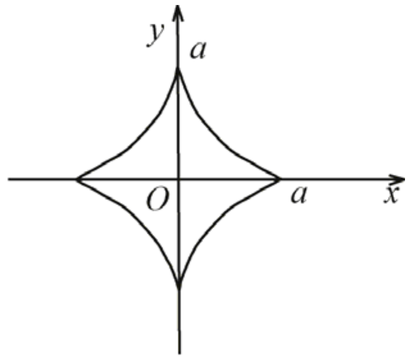


Рис. 3.18. Астероида

Уравнение в прямоугольных координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

параметрические уравнения: $\begin{cases} x = a \cdot cos^3 t, \\ y = a \cdot sin^3 t \end{cases}$

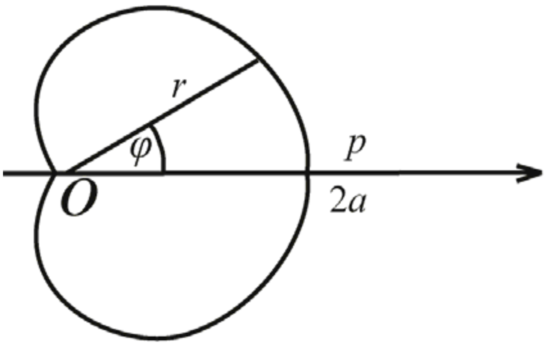


Рис. 3.19. Кардиоида

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r=a(1+cos\varphi)$, где $a>0$. Кардиоида – частный случай улитки Паскаля ($a=b$)

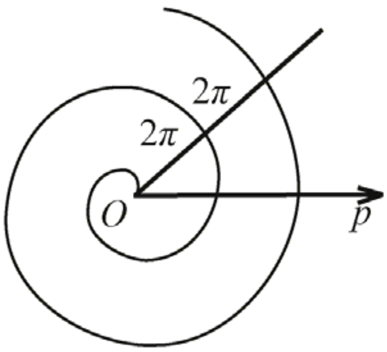


Рис. 3.20. Спираль Архимеда

Уравнение кривой в полярных координатах $r=a\varphi$, где $a > 0$ – постоянное.

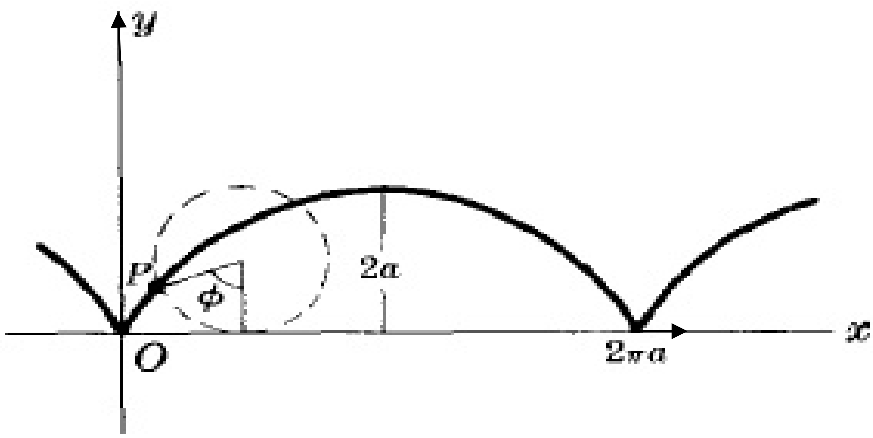


Рис. 3.21. Циклоида.

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид

$\begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(1 - cost), \end{cases}$ где $a > 0$. Циклоида – это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

3.4. Контрольные вопросы

1. Какую фигуру на плоскости описывает линейное уравнение?
2. Верно ли, что каждое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ является уравнением прямой на плоскости?
3. Верно ли, что любая прямая на плоскости определяется своим нормальным или направляющим вектором?
4. Перечислить виды уравнений прямой на плоскости.
5. Каковы условия перпендикулярности (параллельности) прямых на плоскости?
6. Справедливо ли утверждение, что в уравнении кривой

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ большой полуосью является число a , а малой число b?

b) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ действительной полуосью является число a, мнимой число b.

8. Чему равны эксцентриситеты у окружности, эллипса, гиперболы и параболы?
9. Что характеризует у кривой величина эксцентриситета?

3.5. Тест «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Угловой коэффициент прямой $6x+2y-5=0$ равен:

   1) -3 2) 3 3) -6 4) 2

2. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=2x+3$, является: 1) $2x - y + 1 = 0$ 2) $3x - y - 5 = 0$ 3) $x + 3y + 12 = 0$ 4) $x + 3y + 4 = 0$

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-2,0)$ перпендикулярно прямой $3x+y+4=0$, имеет вид…

4. Даны уравнения прямых:

1) $x+y=0$
2) $x+y+2=0$
3) $2x+y+2=0$
4) $y=3x$.

Выбрать те, которые проходят через начало координат

a) только 1) и 4)
b) только 4)
c) только 3)
d) только 1)
e) только 2).

5. В порядке увеличения угла их наклона к оси абсцисс прямые располагаются…

1) $2y+x-16=0$
2) $3y+x-6=0$
3) $x-4y+18=0$
4) $y+x-8=0$
5) $x-6y+20=0$.

6. Пары прямых

1) $2y-6x-10=0$ и $3y-9x+4=0$
2) $3y-8x\text{-}2=0$ и $16x-6y+4=0$
3) $y-2x-7=0$ и $x+2y+10=0$
4) $y-6x-10=0$ и $y-3x+2=0$

a) параллельны
b) пересекаются
c) взаимно перпендикулярны
d) совпадают.

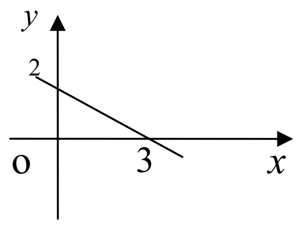
7. Из перечисленных прямых

1) $3-\text{-}4y+5=0$
2) $2x+5y-4=0$
3) $6x-8y-3=0$
4) $y=-\frac{3}{4}x+2$
5) $3x-5y+5=0$

параллельными являются…

8. Уравнение прямой, проходящей через точки $(-1,1)$ параллельно прямой $2x-y+5=0$, имеет вид…

9. Уравнение прямой, изображённой на рисунке



1) $3x+2y=6$
2) $2x+3y=1$
3) $2x+3y=6$
4) $3x+2y=1$.

10. Из перечисленные прямых

1) $y=4x+1$

2) $y=2x$

3) $y-\frac{x}{2}-4=0$

4) $y+4x+5=0$ перпендикулярными являются…

11. Прямые $4x+2y+5=0$ и $\alpha x+y_0-1=0$ перпендикулярны, если α равно…

12. Прямая $3x-3y+5=0$ образует с положительным направлением оси Ох угол, равный…

13. Уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x-1$, является

1) $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{7}$

2) $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{2}$

3) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}$

4) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{5}$.

14. Угловой коэффициент k и величина отрезка b, отсекаемого прямой $x+2y+6=0$ на оси Оy, равна:

1) $b=-3$, $k=-\frac{1}{2}$

2) $b=6$, $k=2$

3) $b=3$, $k=\frac{1}{2}$

4) $b=6$, $k=\frac{1}{2}$

5) $b=3$, $k=2$.

15. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,3)$ и $B(1,2)$, имеет вид…

16. Прямые $4x+2y+5=0$ и $\alpha x+y-1=0$ перпендикулярны, если α равно…

17. Прямые $2x+y-2=0$ и $x+y-3=0$ пересекаются в точке…?

18. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (-2,4)$ с направляющим вектором $\bar{S}=(1,3)$, имеет вид…

19. Уравнение оси Ox имеет вид…

20. Уравнение оси Оy имеет вид…

21. Прямая $x+2y=6$ отсекает на оси Оy отрезок, равный…

22. Уравнение $Ax+By+C=0$ определяет прямую, параллельную оси Оy, если:

1) $A=0$

2) $B=0$

3) $B=C=0$

4) $A=C=0$

5) C=0.

23. Расстояние от точки $A(1,1)$ до прямой $3x+4y+3=0$ равно…

24. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-4)$ параллельно оси Оx, имеет вид…

25. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -4)$ параллельно оси Оy, имеет вид…

26. Соответствие между уравнениями прямых на плоскости и их названиями:

1) $y=kx+b$
2) $Ax+Bx+C=0$
3) $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$
4) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
5) $\begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \end{cases}$
6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

a) параметрическое уравнение
b) уравнение прямой, проходящей через две данные точки
c) каноническое уравнение
d) уравнение прямой в отрезках
e) с угловым коэффициентом
f) общее уравнение.

27. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-2y=0$, равен: 1)1 2)4 3) -1 4)3.

28. Уравнение $x^2-2y^2=-8$ определяет на плоскости

1) гиперболу
2) прямую
3) параболу
4) окружность
5) эллипс.

29. Даны уравнения кривых на плоскости:

1) $2y^2+(x-1)-5=0$
2) $4(x-1)^2+(y+3)^2-5=0$
3) $x^2+y^2-5=0$
4) $2x^2-y^2-5=0$
5) $y^2-x-5=0$
6) $(y+1)^2-2x^2-5=0$

Число уравнений, задающих гиперболу в этом списке, равно…

30. Уравнение $2x^2 + 2y^2 + x = 0$ определяет на плоскости:
1) эллипс
2) окружность
3) прямую
4) гиперболу
5) параболу.

31. Соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями
1) $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 64$
2) $x^2 + 2y = 4$
3) $x^2 + 9y^2 = 9$
4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

a) окружность
b) эллипс
c) парабола
d) гипербола.

32. Дано уравнение гиперболы $9x^2 - y^2 + 9 = 0$. Расстояние между вершинами гиперболы равно…

33. Дано уравнение эллипса $3x^2 + 6y - 18 = 0$. Расстояние между вершинами эллипса равно…

34. Координаты фокуса параболы $x^2 + 18y = 0$ равны…

35. Уравнения асимптот гиперболы $3x^2 - y^2 = 12$ имеют вид…

36. Координаты фокуса эллипса $10x^2 + y^2 = 10$ равны…

37. Уравнение директрисы параболы $y^2 - 18x = 0$.

38. Координаты фокуса гиперболы $5y^2 - 4x^2 = 20$ равны…

39. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$; большая полуось равна 5. Уравнение эллипса имеет вид:
1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

40. Уравнение параболы с фокусом $F(3,0)$ и директрисой $x+3=0$ имеет вид:

1) $y^2 = -12x$ 2) $x^2 = 12y$

3) $y^2 = 12x$ 4) $x^2 = -12y$.

3.6. Задачи

3.1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(3,-1)$ и:

1) имеющей направляющий вектор $\bar{S}=(1,-3)$,

2) имеющей угловой коэффициент $k=\frac{5}{2}$,

3) имеющую вектор нормаль $\bar{n}=(2{,}5)$,

4) отсекающей на оси Ox отрезок $a=-3$,

5) проходящей через точку $B(4,\ -2)$,

6) отсекает на осях координат одинаковые отрезки.

3.2. Составить разные виды уравнения прямой, проходящей через точку $A(2{,}3)$ параллельно прямой $5x-2y+7=0$.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3{,}2)$:

1) под углом 135° к оси Ox,

2) параллельно оси Oy,

3) параллельно оси Ox,

4) и точку $B(-2,\ -1)$.

3.4. В треугольнике с вершинами $A(16,\ -6)$, $B(4{,}3)$ и $C(20{,}16)$ найти уравнение сторон AB, AC и угол при вершине A.

3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $x+y-7=0$ и параллельной прямой $y=4x+1$.

3.6. Найти точку, симметричную точке $A(-2,-1)$ относительно прямой l, заданной уравнением $x=2y-16$.

3.7. Составить уравнения прямых, которые проходят через вершины треугольника $A(2,-1)$, $B(3{,}5)$ и $C(-4{,}2)$ параллельно противоположным сторонам.

3.8. В параллелограмме заданы уравнения двух сторон $8x+3y+1=0$ и $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$.Определить вершины этого параллелограмма.

3.9. Дан треугольник ABC с вершинами $A(-7{,}2)$, $B(5,\ -3)$, $C(8{,}1)$. Составить уравнение медианы, высоты и биссектрисы, проведённых из вершины B.

3.10. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-2{,}2)$ и $C\ (0,-3)$. Составить уравнения его сторон.

3.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух прямых $3x-2y+5=0$ и $4x+3y+1=0$, если эта прямая:

1) проходит через точку $A(6,\ -1)$,

2) параллельна прямой $x+2y-7=0$,

3) перпендикулярна к прямой $2x-5y+6=0$,

4) проходит над углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $3x+y-1=0$.

Решить задачу, определяя и не определяя точки пересечения заданных прямых.

3.12. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x-y+4=0$. Найти угол, который образует этот перпендикуляр с осью Ox.

3.13. Найти расстояние

1) от точки $A(1,\ -2)$ до прямой $3x-4y+9=0$,

2) от точки пересечения прямых $3x-4y+25=0$ и $5x+2y-19=0$ до прямой $6x-8y-5=0$,

3) от середины отрезка, который соединяет точки $A(3,\ -4)$ и $B(-7,6)$ до прямой $x+2y-5=0$.

3.14. В квадрате заданы вершины $A(-2,-3)$ и одна из его сторон $3x-4y-2=0$. Найти площадь квадрата и длину его диагонали.

3.15. Найти центр и радиус окружности:

1) $3x^2+3y^2-6x+8y=0$,

2) проходящей через точки $A(-1,5)$, $B(-2,\ -2)$ и $C(5,5)$.

3.16. Через точки $A(8,-2)$ и $B(10,0)$ провести окружность радиуса $r=10$.

3.17. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $(5,3)$ с центром в точке пересечения прямых $5x-3y-13=0$ и $x+4y+2=0$.

3.18. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1) большая полуось равна 13, а расстояние между фокусами равно 10,

2) малая полуось равна 4, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

3.19. Выяснить, какая кривая задаётся уравнением:

1) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$, 2) $25x^2+169y^2=4225$.

3.20. Определить полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $3x^2+4y^2-12=0$.

3.21. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

3.22. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,8. Найти расстояние между фокусами.

3.23. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если:

1) полуоси эллипса равны 7 и 4,

2) расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

3.24. Эллипс проходит через точки $A(2,\sqrt{3})$ и $B(0,2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки A до фокусов.

3.25. Найти точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса F_2 равно 14.

3.26. Выяснить, какая кривая задаётся уравнением $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найти основные параметры кривой, её эксцентриситет, изобразить её графически.

3.27. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Оx симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно, а эксцентриситет $\frac{3}{2}$,

2) расстояние между фокусами равно 20, а уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

3.28. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Оy симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между её вершинами равно 20, а расстояние между фокусами 24,

2) действительная полуось равна 5, а эксцентриситет $\frac{7}{5}$.

3.29. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2,1)$ и $B(-4,\sqrt{7})$.

3.30. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.31. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если это парабола проходит через точку A и имеет указанную ось симметрии:

1) $A(-2,4)$, Оx

2) $A(1,-2)$, Оx

3) $A(6,2)$, Оy

4) $A(-1,-1)$, Оy.

Определить фокус и уравнение директрисы для каждой из этих парабол.

3.32. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты её фокуса:

1) $F(-5,0)$ 2) $F(0,\frac{1}{2})$.

3.33. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой является прямая $2y-5=0$.

3.34. Составить уравнение параболы:

1) проходящей через точки (0,0) и (1,−3) и симметричной относительно оси Ox,

2) проходящей через точки (0,0) и (2,−4) и симметричной относительно оси Oy.

3.35. Выяснить вид заданных кривых:

1) $y = x^2 + 5x + 6$

2) $x = y^2 + 2y + 3$

3) $y = \frac{1+x}{y-2}$

4) $x = \frac{2y+3}{x+5}$

5) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

6) $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

7) $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

8) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1.$

3.36. Для каждого из заданных уравнений определить, какие геометрические объекты они определяют:

1) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0$

3) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 12y = 0$

4) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

5) $2y^2 + 2y - x + 2 = 0$

6) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0.$

3.7. Ответы

3.1. 1) $3x+y-8=0$,

2) $5x-2y-17=0$,

3) $2x+5y-1=0$,

4) $x+6y+3=0$,

5) $x+y-2=0$,

6) $x+y-2+0$, $x-y-4=0$.

3.2. 1) $y-3=\frac{5}{2}(x-2)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{5}{2}$,

2) $5(x-2)-2(y-3)=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку

$A(2,3)$ и с вектором нормали $\bar{n} = (5, -2)$,

3) $5x-2y-4=0$ – общее уравнение прямой,

4) $\frac{x}{\frac{4}{5}} + \frac{y}{-2} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

3.3. 1) $y-2 = (-1)(x-3)$ или $x+y-5=0$,

2) $x=3$,

3) $y=2$,

4) $3x-5y+1=0$.

3.4. $3x+4y-24=0$ – уравнение стороны AB,

$11x-2y-188=0$ – уравнение стороны BC,

$tg\angle A=2$, $A=arctg2$.

3.5. $4x-y-9=0$.

3.6. $B(6,15)$.

3.7. $3x-7y-13=0$, $x+2y-13=0$, $6x-y+26=0$.

3.8. $A(-2,5)$, $B(1, -3)$, $C(8, -17)$, $D(5, -9)$.

3.9. $x+y-2=0$ – уравнение медианы BM,

$15x-y-78=0$ – уравнение высоты BH,

$11x+3y-46=0$ – уравнение биссектрисы BL.

3.10. $3x+7y-8=0$, $7x-3y+20=0$, $3x+7y+21=0$, $7x-3y-9=0$.

3.11. 1) $2x+7y-5=0$, 2) $x+2y-1=0$, 3)$5x+2y+3=0$, 4) $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$.

3.12. $OH=\frac{4}{\sqrt{2}}$; $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

3.13. 1) $d=4$, 2) $d=5,5$, 3) $d=\sqrt{5}$.

3.14. $S=16$, $d=4\sqrt{2}$.

3.15. 1) $(1,\frac{4}{3})$, $r=\frac{5}{3}$, 2) $(2,1)$ и $r=5$.

3.16. $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 100$ и $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 100$.

3.17. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

3.18. 1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, 2)$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3.19. 1) $(x+2)^2+(y-3)^2= 16$ – окружность радиуса $r = 4$ с центром в точке $(-2,3)$,

2)$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} =1$ – эллипс, большая полуось $a = 13$, а малая полуось $b =5$.

3.20. $x = 2$, $b= \sqrt{3}, F_1(-1,0), F_2(1,0), \varepsilon = 0,5$.

3.21. $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3.22. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$, $2c = 12$.

3.23. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1,$ 2)$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1.$
3.24. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, \quad \varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_1=4-\sqrt{3}, \quad r_2=4+\sqrt{3}.$
3.25. $(-5, 3\sqrt{3})$, $(-5,$-$3\sqrt{3})$.
3.26. Гипербола a=2, b=$\sqrt{3}$, $c=\frac{5}{2}, F_1(-5{,}0), F_2(5{,}0).$
3.27. 1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$
2) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1.$
3.28. 1) $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{44}=,$
2) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1.$
3.29. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$
3.30. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$
3.31. 1) $y^2=-8x$, F $(-2{,}0)$
2) $y^2=4x$, F=(1,0)
3) $x^2=18y$, $F\left(0;\frac{9}{2}\right)$
4) $x^2=-y$, $F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$.
3.32. 1) $y^2=-20x$, 2) $x^2=2y$.
3.33. $x^2=-10y$.
3.34. 1) $y^2=9x$, 2) $x^2=-y$.
3.35. 1)-4) – парабола, 5),8) – эллипс, 6),7) – гипербола.
3.36. 1) окружность
2) пустое множество
3) гипербола
4) эллипс
5) парабола
6) пара пересекающихся прямых.

3.8. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Даны вершины треугольника ABC. Найти:
1) уравнение стороны AB,
2) уравнение высоты CH,
3) уравнение медианы AM,
4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH, уравнение

№ вар.	*A*	*B*	*C*
1	(−2;4)	(3;1)	(10;7)
2	(−3;−2)	(14;4)	(6;8)
3	(1;7)	(-3;-1)	(11;−9)
4	(1;0)	(−1;4)	(9;5)
5	(1;−2)	(7;1)	(3;7)
6	(−2;−3)	(1;6)	(6;1)
7	(−4;−2)	(−6;6)	(6;2)
8	(4;−3)	(7;3)	(1;10)
9	(4;−4)	(8;2)	(3;8)
10	(−3;−3)	(5;−7)	(7;7)
11	(1;−6)	(3;4)	(−3;3)
12	(−4;2)	(8;−6)	(2;6)
13	(−5;2)	(0;−4)	(5;7)
14	(4;−4)	(6;2)	(−1;8)
15	(−3;8)	(−6;2)	(0;−5)
16	(6;−9)	(10;−1)	(−4;1)
17	(4;1)	(−3;−1)	(7;−3)
18	(−4;2)	(6;4)	(4;10)
19	(3;−1)	(11;3)	(−6;2)
20	(−7;−2)	(−7;4)	(5;−5)
21	(−1;−4)	(9;6)	(−5;4)
22	(10;−2)	(4;−5)	(−3;1)
23	(−3;−1)	(−4;−5)	(8;1)
24	(−2;−6)	(−3;5)	(4;9)
25	(−7;−2)	(3;−8)	(−4;6)
26	(0;2)	(−7;−4)	(3;2)
27	(7;0)	(1;4)	(−8;−4)
28	(1;−3)	(0;7)	(−2;4)
29	(−5;1)	(8;−2)	(1;4)
30	(2;5)	(−3;1)	(0;4)

2. Составить канонические уравнения:

1) эллипса,
2) гиперболы,

3) параболы.

A,B – точки, лежащие по кривой, *F* – фокус, *a* – большая (действительная) полуось, *b* – малая (мнимая) полуось, *c* – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, *D* – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние.

№ вар.	1)	2)	3)
1	$b=15$, $F(-10,0)$	$a=13$, $\varepsilon=\frac{14}{13}$	$D{:}x=-4$
2	$b=2$, $F(4\sqrt{5},0)$	$a=7$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{85}}{7}$	$D{:}x=5$
3	$A(3,0)$, $B(2,\frac{\sqrt{5}}{3})$	$k=\frac{3}{4}, \varepsilon=\frac{5}{4}$	$D{:}y=-2$
4	$\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{5}, A(-5,0)$	$A(\sqrt{80},3)$, $B(4\sqrt{6},3\sqrt{2})$	$D{:}y=1$
5	$2a=22$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{57}}{11}$	$k=\frac{2}{3}$, $2c=10\sqrt{3}$	ось симметрии Ox $A(27,9)$
6	$b=\sqrt{15}, \varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{25}$	$k=\frac{3}{4}, 2a=16$	ось симметрии Ox $A(4,-8)$
7	$a=4$, $F(3,0)$	$b=2\sqrt{10}, F(11,0)$	$D{:}x=-2$
8	$b=4, F(9,0)$	$a=5$, $\varepsilon=\frac{7}{5}$	$D{:}x=6$
9	$A(0,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{\frac{14}{3}},1)$	$k=\frac{\sqrt{21}}{10}, \varepsilon=\frac{11}{10}$	$D{:}y=-4$
10	$\varepsilon=\frac{7}{8}, A(8,0)$	$A(3,\sqrt{\frac{3}{5}})$, $B(\sqrt{\frac{13}{5}},6)$	$D{:}y=4$
11	$2a=24$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{22}}{6}$	$k=\sqrt{\frac{2}{3}}, 2c=10$	ось симметрии Ox, $A(-7,-7)$
12	$b=2$, $\varepsilon=\frac{5\sqrt{29}}{29}$	$k=\frac{12}{13}, 2a=26$	ось симметрии Ox,

Продолжение

№ вар.	1)	2)	3)
			$A(-5{,}15)$
13	a=6, $F(-4{,}0)$	b=3, $F(7{,}0)$	D:x=−7
14	b=7, $F(5{,}0)$	a=1,$\varepsilon=\frac{12}{11}$	D:x=10
15	$A(-\sqrt{\frac{17}{3}},\frac{1}{3})$, $B(\frac{\sqrt{21}}{2},\frac{1}{2})$	$k=\frac{1}{2}, \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$	D:y=−1
16	$\varepsilon=\frac{3}{5}, A(0{,}8)$	$\varepsilon=\frac{3}{5}, A(0{,}8)$	D:y=9
17	2a=22, $\varepsilon=\frac{10}{11}$	2a=22, $\varepsilon=\frac{10}{11}$	ось симметрии Ox , $A(-7{,}5)$
18	b=5, $\varepsilon=\frac{12}{13}$	b=5, $\varepsilon=\frac{12}{13}$	ось симметрии Oy , $A(-9{,}6)$
19	a=9, $F(7{,}0)$	a=9,$F(7{,}0)$	D:$x=-\frac{1}{4}$
20	b=5,$F(-10{,}0)$	b=5,$F(-10{,}0)$	D:x=12
21	$A(0,-2)$, $B(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$	$A(0,-2)$, $B(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$	D:y=5
22	$\varepsilon=\frac{2}{3}$, $A(-6{,}0)$	$\varepsilon=\frac{2}{3}$,$A(-6{,}0)$	D:y=1
23	2a=50, $\varepsilon=\frac{3}{5}$	2a=50, $\varepsilon=\frac{3}{5}$	ось симметрии Оy, $A(4{,}1)$
24	$b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{7}{8}$	$b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{7}{8}$	ось симметрии Oy, $A(-2{,}3\sqrt{2})$
25	a=B,$F(-5{,}0)$	a=B, $F(-5{,}0)$	D:$x=-\frac{3}{8}$
26	b=7, $F(13{,}0)$	b=7, $F(13{,}0)$	D:x=13
27	$A(-3{,}0)$, $B(1,\frac{\sqrt{40}}{3})$	$A(-3{,}0)$, $B(1,\frac{\sqrt{40}}{3})$	D:y=4
28	$\varepsilon=\frac{5}{6}, A(0,-\sqrt{11})$	$c=\frac{5}{6}$, $A(0,-\sqrt{11})$	D:y=3

Окончание

№ вар.	1)	2)	3)
29	2*a*=30, $\varepsilon =\frac{17}{15}$	2*a*=30, $\varepsilon =\frac{17}{15}$	ось симметрии *Oy*, *A*(4,−10)
30	*b*=$2\sqrt{2}, \varepsilon = \frac{7}{9}$	*b*=$2\sqrt{2}, \varepsilon = \frac{7}{9}$	ось симметрии *Oy* , *A*(−45, 15)

3.9. Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника *ABC: A*(4,3), *B*(−3,−3), *C*(2,7).

Найти:

1) уравнение стороны AB,
2) уравнение высоты *CH*,
3) уравнение медианы *AM*,
4) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*,
5) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*.

Решение.

1) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение стороны *AB*: $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$ или $6x - 7y - 3 = 0$.

2) Согласно определению уравнения прямой с угловым коэффициентом, угловой коэффициент прямой *AB*: k_1=$\frac{6}{7}$. Так как прямые *AB* и *CH* перпендикулярны, то угловой коэффициент k_2 высоты *CH* равен: k_2=$-\frac{1}{K1} = -\frac{7}{6}$. Зная угловой коэффициент высоты *CH* и координаты точки *C*, составим уравнение высоты *OH*: $y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2)$ или $7x + 6y - 56 = 0$.

3) Находим координаты x_M и y_M середины *M* отрезка *BC*: $x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}, y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$. Нам известны две точки *A* и *H*, через которые проходит высота *CH*. По двум этим точкам составим уравнение медианы *AM*: $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3}$ или $2x - 9y + 19 = 0$.

4) Найдём координаты точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты

CH. Для этого составим систему уравнений: $\begin{cases}7x + 6y - 56 = 0,\\ 2x - 9y + 19 = 0\end{cases}$ и решим её по правилу Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix}7 & 6\\ 2 & -9\end{vmatrix} = -75$, $\Delta x = \begin{vmatrix}56 & 6\\ -19 & -9\end{vmatrix} = -390$, $\Delta y = \begin{vmatrix}7 & 56\\ 2 & -19\end{vmatrix} = -245$, $x = -\frac{390}{-45} = \frac{26}{5}, y = -\frac{245}{-75} = \frac{49}{15}$. Таким образом, имеем $N(\frac{26}{5}, \frac{49}{15})$.

5) Так как прямая, проходящая через вершину *C*, параллельна стороне *AB*, то их угловые коэффициенты равны – $k_1 = \frac{6}{7}$. Тогда по точке *C* и угловому коэффициенту k_1 составим уравнение прямой *CD*:

$y - 7 = \frac{6}{7}\ (x - 2)$или $6x - 7y + 37 = 0$.

Ответ: 1) $6x-7y-3=0$,

2) $7x+6y-56=0$,

3) $2x-9y+19=0$,

4) $(\frac{26}{5}, \frac{49}{15})$,

5) $6x-7y+37=0$.

2. Составить каноническое уравнение:

1) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$,

2) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$,

3) параболы, имеющей директрису $x=-3$.

Решение.

1) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

По условию большая полуось $a=3$, $c=\sqrt{5}$. Так как для эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, то найдём $b^2 = 3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию $b=2$, $c=\sqrt{13}$; для гиперболы $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому $a^2 = c^2 - b^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2^2 = 9$. Искомое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3) Каноническое уравнение параболы в данном случае имеет вид $y^2 = 2px$, а уравнение её директрисы $x=-\frac{p}{2}$. По условию уравнение директрисы $xz^2 - 3$. Следовательно, $-\frac{p}{2} = -3, p = 6$. Искомое уравнение параболы: $y^2 = 12x$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, 3) $y^2=12x$.

3.10. Прямая и плоскость в пространстве

3.10.1. Векторное уравнение плоскости

Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна вектору $\bar{n}=(A,B,C)$; точка $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, т. е.

$$\bar{n}\,\overline{M_0M}=0. \tag{3.24}$$

Уравнение (3.24) − векторное уравнение плоскости, ненулевой вектор $\bar{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

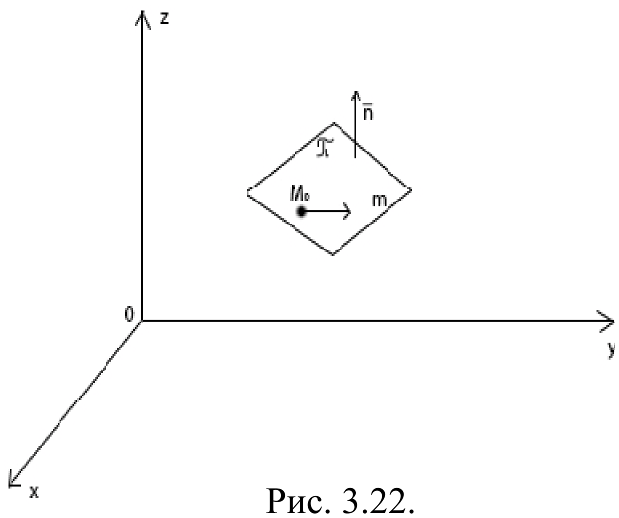


Рис. 3.22.

Запишем векторное уравнение плоскости в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3.25}$$

3.10.2. Общее уравнение плоскости

Перепишем иначе уравнение (3.25):

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3.26}$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Уравнение (3.26) называется общим уравнением плоскости; оно является уравнением 1−й степени с тремя неизвестными.

Частные случаи уравнения (3.26) приведены в следующей таблице:

№	Значения коэффициентов	Уравнение Плоскости	Положение плоскости
1	D=0	Ax+By+Cz=0	Плоскость проходит через начало координат
2	A=0,B≠0,C≠0	By+Cz+D=0	Плоскость параллельна оси Ox
3	B=0,A≠0,C≠0	Ax+Cz+D=0	Плоскость параллельна оси Oy
4	C=0,A≠0,B≠0	Ax+By+D=0	Плоскость параллельна оси Oz
5	A=0,B=0,C≠0	Cz+D=0	Плоскость параллельна оси Oxy
6	A=0,C=0,B≠0	By+D=0	Плоскость параллельна оси Oxz
7	B=0,C=0,A≠0	Ax+D=0	Плоскость параллельна оси Oyz
8	C=0,D=0	Ax=By=0	Плоскость проходит через ось Oz
9	B=0,D=0	Ax+Cz=0	Плоскость проходит через ось Oy
10	A=0,D=0	By+Cz=0	Плоскость проходит через ось Ox

Заметим, что для построения плоскости достаточно получить какие-нибудь третьи точки данной плоскости, например, точки пересечения с осями координат (если плоскость не параллельна ни одной из осей) и не проходит через начало коодинат.

3.10.3. Уравнение плоскости в отрезках

Если точки (a,0,0), (0,b,0), (0,0,c) – точки пересечения плоскости π с осями Оx, Оy, Оz соответственно (a,b,c не равны нулю), то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.27)$$

3.10.4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть плоскость π проходит через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ и $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости.

Введём в рассмотрение векторы, лежащие в плоскости π: $\overline{M_1M_1} = = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Тогда согласно условию компланарности векторов имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.28)$$

Пример 3.7

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,3)$ и:

1) перпендикулярной вектору $\bar{n} = (-3,4,5)$,
2) параллельной плоскости $2x-3y+5z+6=0$,
3) точку $M_2(2,0,5)$ и параллельной оси Ox,
4) проходящей через ось Oy.

Решение.

1) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n} = (-3,4,5)$ и проходящей через точку $M_1(-1,2,3)$, согласно формуле (3.25) имеем вид: $-3\ (x+1)+4(y-2)+5(z-3)=0$ или $-3x+4y+5z-26=0$, или $3x-4y-5z+26=0$.

2) Плоскость, параллельная плоскости $2x-3y+5z+6=0$ перпендикулярна вектору $\bar{n} = (-3,4,5)$. Уравнение такой плоскости, проходящей через данную точку $M_1(-1,2,3)$, получено в п.3.4.1.

3) Так как плоскость параллельна оси Ox, то в уравнении (3.26) коэффициент A=0, т. е. уравнение плоскости имеет вид $By+Cz+D=0$. Точки $M_1(-1,2,3)$ и $M_2(2,0,5)$ лежат на плоскости. Поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению, т. е. $\begin{cases} 2B + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0. \end{cases}$ Откуда $B=C$, $D=-5C$; следовательно, уравнение плоскости: $(y+z-5)C=0$, $C\neq0$, или $y+z-5=0$.

4) Так как плоскость проходит через ось Oy, то в уравнении (3.26) её коэффициенты B=0, D=0, т. е. уравнение плоскости имеет вид $Ax+Cz=0$. Подставив в уравнение координаты точки $M_1(-1,2,3)$, лежащей на плоскости, получим: $-A+3C=0$, откуда $A=3C$ и уравнение плоскости (после сокращения на $C\neq0$): $3x+z=0$.

3.10.5. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$,

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2).$ (3.29)

Углом между двумя плоскостями называется один из двугранных углов, образуемых этими плоскостями.

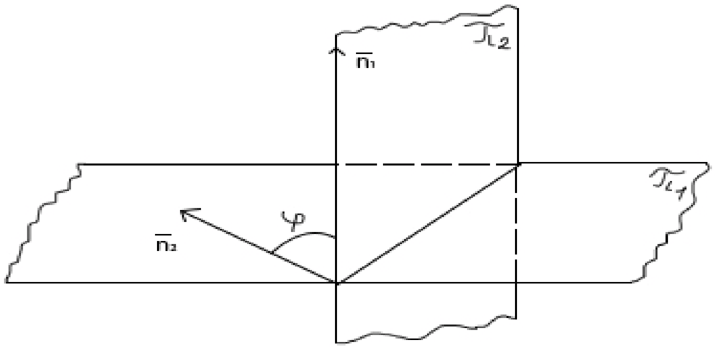


Рис. 3.23.

Угол φ между нормальными векторами $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ равен одному из этих двугранных углов. Поэтому:

$$cos\varphi = \frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}\ . \quad (3.30)$$

Получим условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей π_1 и π_2:

1) $\pi_1 || \pi_2 <=> \overline{n_1} || \overline{n_2} <=> \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$,

2) $\pi_1 \perp \pi_2 <=> \overline{n_1} \perp \overline{n_2} <=> \overline{n_1}\,\overline{n_2} = 0 <=> A_1A_2 + B_1B_2 +$
$+C_1C_2 = 0.$

Пример 3.8.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(1{,}1{,}-1)$ параллельно плоскости $3x+2y-z+4=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\overline{n_1} = (3{,}2,-1)$ данной плоскости будет нормальным вектором плоскости, уравнение которой нужно составить. Поэтому искомое уравнение имеет вид $3(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$ или $3x+2y-z-6=0$.

Ответ: $3x+2y-z-6=0$.

Пример 3.9.

Найти угол между плоскостями 3*x*+2*y*−*z*+4=0 и *x*+2*y*−*z*+10=0.

Решение.

Найдём косинус угла φ между нормальными векторами

$\bar{n} = (3,2,-1)$и $\overline{n_2} = (1,2,-1)$:

$cos\varphi = \frac{3\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{7}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$,

отсюда $\varphi = arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Ответ: $\varphi = arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$.

3.10.6. Уравнение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве определяется, если дана какая-нибудь точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямой L и вектор $\bar{S} \parallel L$ называется направляющим вектором прямой L

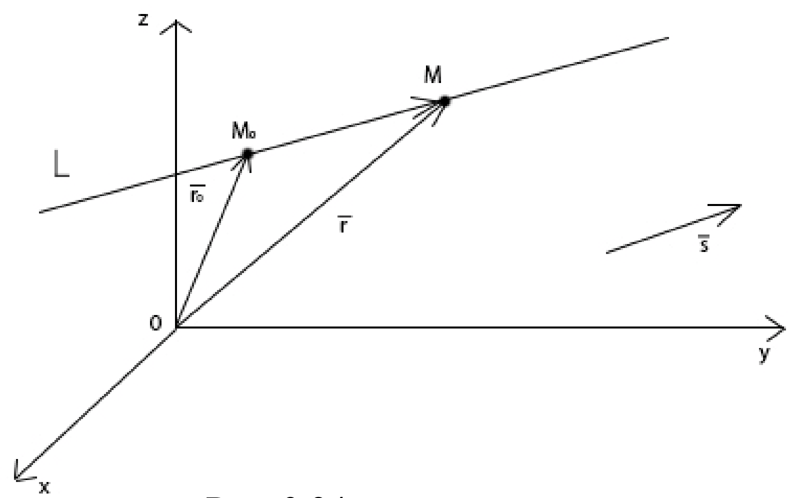


Рис. 3.24.

Возьмём на прямой L произвольную точку M(*x*,*y*,*z*). Обозначим через $\overline{r_0}$ и $\bar{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда

$$\bar{r} = \overline{r_0} + \overline{M_0M}. \qquad (3.31)$$

Вектор $\overline{M_0M} || \bar{S}$. Поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t – скаляр, называется параметром. Уравнение (3.31) можно переписать таким образом:

$$\bar{r} = \overline{r_0} + t\bar{S}. \qquad (3.32)$$

Уравнение (3.32) называется векторным уравнением прямой.

Из уравнения (3.32) можно получить другие виды уравнений прямой:

$$1)\quad \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tp, \\ z = z_0 + tq. \end{cases} \qquad (3.33)$$

Уравнения (3.33) называются параметрическими уравнениями прямой.

$$2)\quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q}, \qquad (3.34)$$

где $\bar{S} = (m, p, q)$ – направляющий вектор прямой.

Уравнения (3.34) называются каноническими уравнениями прямой.

$$3)\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.35)$$

Уравнение (3.35) – уравнение прямой проходящей через две точки.

Любую прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух не параллельных плоскостей, т. е. совместной системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.36)$$

Уравнения (3.36) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Пример 3.10.

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1{,}0{,}2)$ параллельно вектору $\bar{S} = (0{,}0{,}1)$.

Решение.

Согласно формуле (3.34) имеем: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Ответ: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Заметим, что запись $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ означает, что прямая проходит через точку Mо$(-1{,}0{,}2)$ и её направляющий вектор $\bar{S} = (0{,}0{,}1)$. Нули в знаменателях в данном случае не означают деление на нуль.

Ниже покажем, как из общих уравнений прямой (3.36) перейти к каноническим (3.34). Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Координаты точки Mо, лежащей на прямой L, можно получить из системы (3.36), придав одной из координат точки Mо произвольное значение.

Так как векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ перпендикулярны прямой L_1, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять вектор $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$, т. е.

$$\bar{S} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Второй способ. Нужно взять две какие–нибудь точки на прямой L и применить уравнения (3.35).

Пример 3.11.

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Решение.

1-й способ:

Пусть z=0, тогда $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$, точка Mо имеет координаты: Mо(1,0,0).

Найдём координаты направляющего вектора $\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ прямой.

$$\bar{n}_1 = (1,1,1), \bar{n}_2 = (2,1,3): \ \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath} - \bar{k} = (2, -1, -1).$$

Итак, искомое уравнение: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

2-й способ:

Возьмём две точки M_1 и M_2 на прямой. Координаты точек M_1 и M_2 получим, решив системы: $\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$, и $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1, \\ y + 3z = -4. \end{cases}$

Решим 1-ю систему:

$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0, \\ x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ точка M_1 имеет координаты: M_1 (1,0,0)

Решим 2-ю систему:

$\begin{cases} x = 3, \\ y + z = -2, \\ y + 3z = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ z = -1, \\ y = -1. \end{cases}$ Точка M_2 имеет координаты: M_2 (3,–1,–1).

Вектор $\overline{M_1 M_2} = (3 - 1, -1 - 0, -1 - 0) = (2, -1, -1)$ – направляющий вектор прямой.

Итак, канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

3.10.7. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями:
L_1: $\frac{x-x1}{m1}=\frac{y-y1}{p1}=\frac{z-z1}{q1}$,
L_2: $\frac{x-x2}{m2}=\frac{y-y2}{p2}=\frac{z-z2}{q2}$,
$\overline{S_1}=(m_1,p_1,q_1), \overline{S_2}=(m_2,p_2,q_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно (рис. 3.25).

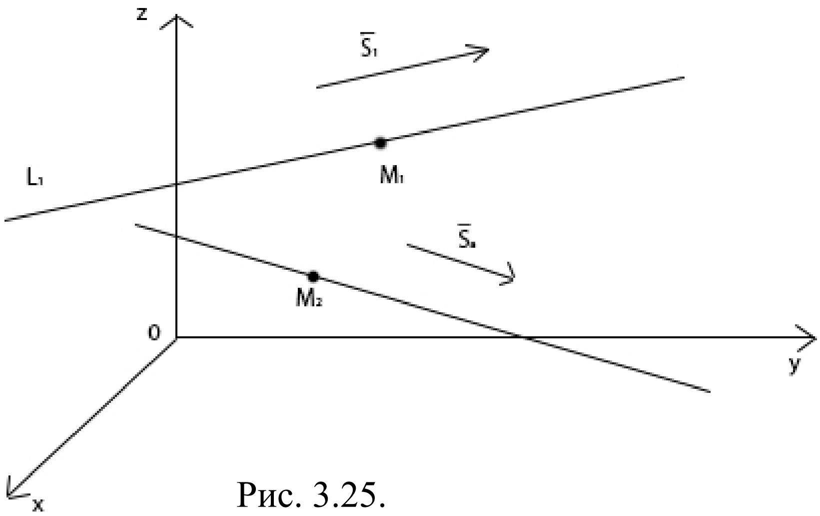


Рис. 3.25.

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$. Поэтому:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S_1}\,\overline{S_2}}{|\overline{S_1}||\overline{S_1}|}=\frac{m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{m_1{}^2+p_1{}^2+q_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+p_2{}^2+q_2{}^2}}. \qquad (3.37)$$

Отсюда можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2:

1) $L_1 \| L_2 <=> \overline{S_1} || \overline{S_2} <=> \frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}$,
2) $L_1 \perp L_2 <=> \overline{S_1}\,\overline{S_2}=0 <=> m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2=0$.

Пример 3.12.

Найти косинус угла между прямыми:

$$L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Решение.

Найдём направляющие векторы прямых:

$\overline{S_1} = (1,-2,3)$, $\overline{S_2} = (1,-2,-1)$.

Тогда согласно (3.37) имеем:

$$cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Ответ: $cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{21}}$.

Пример 3.13.

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,-2,1)$ и перпендикулярно прямым $\frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-4}$ и $x=y=-z$.

Решение.

Так как направляющий вектор $\bar{S}$ прямой должен быть перпендикулярным обеим данным прямым, то в качестве вектора $\bar{S}$ можно взять векторное произведение направляющих векторов данных прямых:

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} - \bar{k} = (1,-2,-1).$$

Параметрические уравнения прямой имеют вид $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t,. \\ z = 1 - t. \end{cases}$

3.10.8. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость π и прямая L заданы уравнениями:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q}.$$

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.

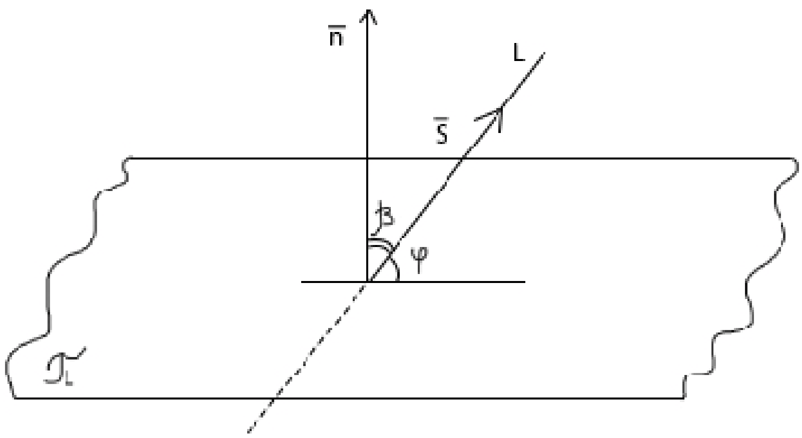


Рис. 3.26.

Обозначим через φ угол между прямой L и плоскостью π, а β – угол между векторами $\bar{S} = (m, p, q)$ и $\bar{n} = (A, B, C)$.

Тогда $cos\beta = \frac{\bar{n}\,\bar{s}}{|\bar{n}||\bar{s}|}$. Найдём $sin\varphi$ (считая $\varphi = \frac{\pi}{2}$): $sin\varphi =$
$= sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$. Отсюда с учётом, что $sin\varphi \geq 0,$ получаем:

$$sin\varphi = \frac{|Am+Bp+Cq|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+p^2+q^2}}\ . \qquad (3.38)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

1) $L \perp \pi <=> \bar{S} || \bar{n} <=> \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$,

2) $L \| \pi <=> \bar{S} \perp \bar{n} <=> \bar{S}\,\bar{n} = 0 <=> Am + Bp + Cq = 0.$

3.10.9. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Для того чтобы найти точку пересечения прямой L

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q} \qquad (3.39)$$

с плоскостью π

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.40)$$

нужно решить систему уравнений (3.39) и (3.40), предварительно записав уравнения (3.39) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \\ z = z_0 + qt. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (3.40) и преобразовав его, получим уравнение:

$$t(Am+Bp+Cq)+(Ax0+By0+Czo+D)=0. \qquad (3.41)$$

Если прямая L не параллельна плоскости π, т. е. если $Am+Bp+Cq\neq 0$, то из равенства (3.41) находим t:

$$t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bp+Cq}.$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки пресечения прямой и плоскости.

Рассмотрим случай, когда $Am+Bp+Cq=0$ ($L\|\pi$). Тогда возможны следующие два случая:

1) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ и 2) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

В случае 1) прямая L параллельна плоскости π и не пересекает плоскость, т. е. уравнение (3.41) решения не имеет (так как имеет вид $0t+k=0$, $k\neq 0$). В случае 2) уравнение (3.41) имеет вид $t0+0=0$, которому удовлетворяет любое значение t, и поэтому любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Следовательно, прямая L лежит на плоскости π. Таким образом, условие принадлежности прямой плоскости имеет вид

$$\begin{cases} Am+Bp+Cq=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \qquad (3.42)$$

Пример 3.14.

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку Mо$(-1,2,-1)$ и перпендикулярной плоскости $3x-4y-5z+1=0$.

Решение.

За направляющий вектор прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\bar{n}=(3,-4{,}5)$, поэтому канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{5}$.

Ответ: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{5}$.

Пример 3.15.

Найти точки пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=y-2=\frac{z-2}{5}$ с плоскостью $x+3y+5z=0$.

Решение.

Запишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+t, \\ z=2+5t, \end{cases}$ подставим эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, получим: $(-1+3t)+3(2+t)+5(2+5t)=0$ или $31t=-17$, т. е. $t=-\frac{17}{31}$.

Искомые координаты точки пересечения:

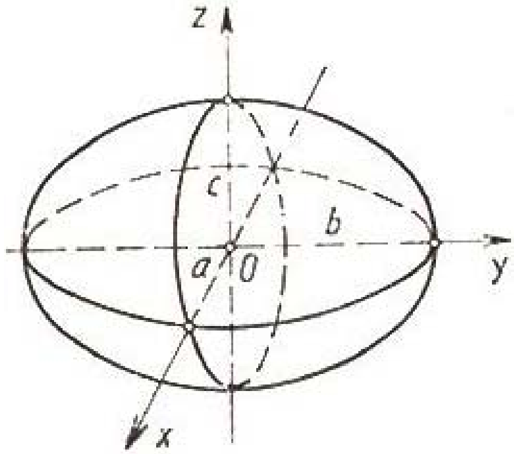
$x_0 = 1 + 3\left(-\frac{17}{31}\right) = -\frac{20}{31}$; $y_0 = 2 + \left(-\frac{17}{31}\right) = \frac{45}{31}$; $z_0 = 2 + 5\left(-\frac{17}{31}\right) == -\frac{23}{31}$.

Ответ: точка пересечения $(-\frac{20}{31}, \frac{45}{31}, -\frac{23}{31})$.

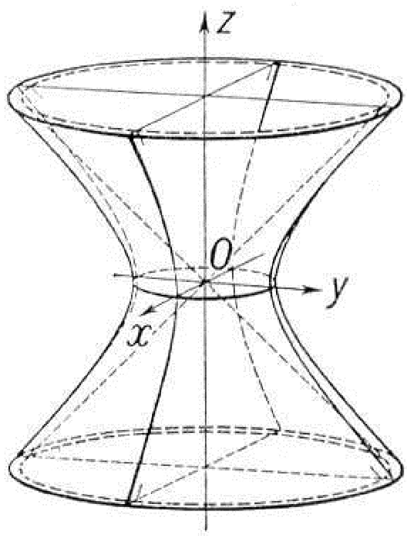
3.11. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат *x,y,z*. Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, полученная вращением линии второго порядка вокруг её оси симметрии.

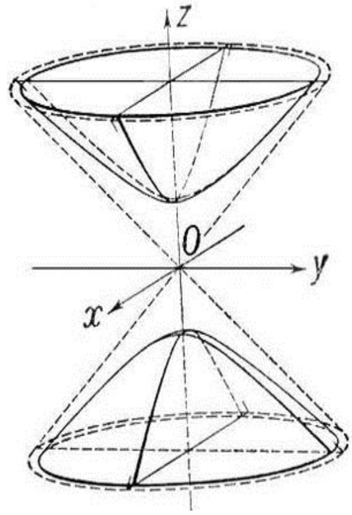
1. Эллипсоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
$a>0$, $b>0$, $c>0$− полуоси эллипсоида .



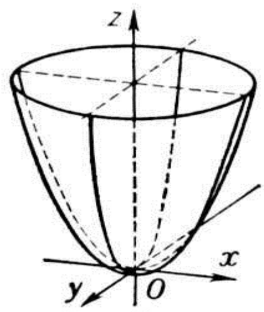
2. Однополостный гиперболоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,
$a>0$, $b>0$, $c>0$.



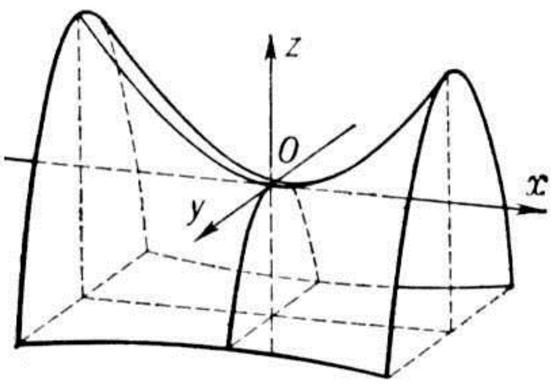
3. Двуполостный гиперболоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.



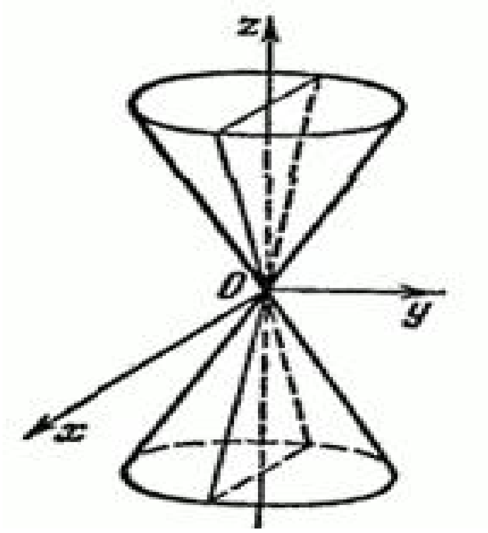
4. Эллиптический параболоид задаётся уравнением $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $a>0$, $b>0$.



5. Гиперболический параболоид задаётся уравнением $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $a>0$, $b>0$.

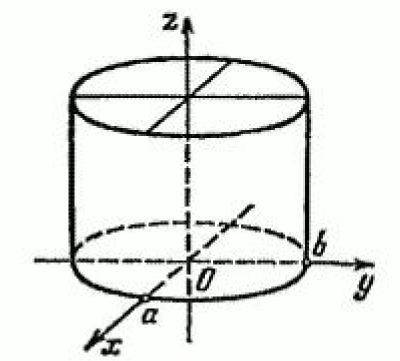


6. Конус второго порядка задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

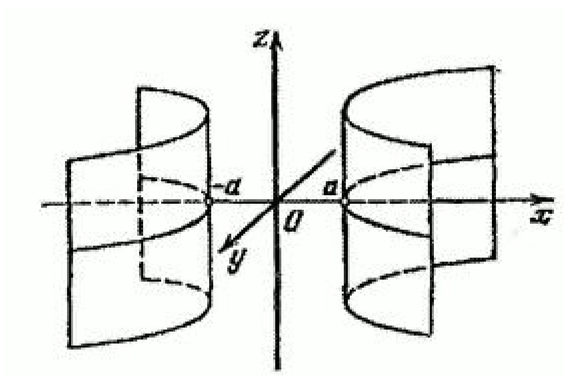


7. Цилиндры. Приведём уравнения цилиндров второго порядка:

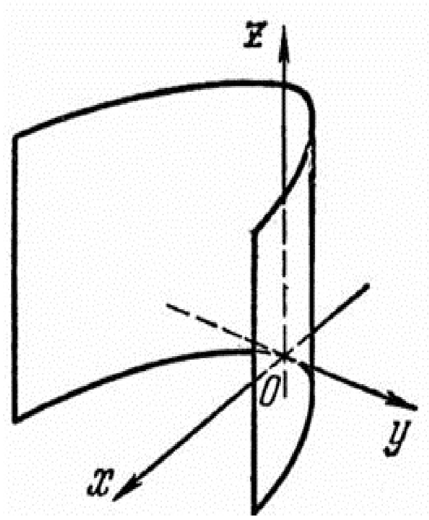
- эллиптический $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$,



- гиперболический $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$,



- параболический $y^2 = 2px$, $p>0$.



3.12. Контрольные вопросы

1. Какую фигуру в пространстве описывает линейное уравнение?
2. Верно ли, что каждое уравнение вида $Ax + By + Cz = 0$ является уравнением плоскости в пространстве?
3. Верно ли, что любая плоскость в пространстве определяется своим нормальным вектором?
4. Перечислить виды уравнений прямой и плоскости в пространстве.
5. Каковы условия перпендикулярности (параллельности) прямых и плоскостей в пространстве?
6. Верно ли, что

   a) плоскость, проходящая через начало координат, параллельна вектору $\bar{n} = (A, B, C)$, задаётся уравнением $Ax + By + Cz = 0$,

   b) в уравнении плоскости в отрезках на осях координат параметры a, b, c − положительные.
7. Справедливы ли следующие утверждения:

   a) эллипсоид, гиперболоид, цилиндр, конус имеют центр и три плоскости симметрии,

   b) параболоиды и параболический цилиндр не имеют центра симметрии.

3.13. Тест «Аналитическая геометрия в пространстве»

1. Координата x_0 точки $A(x_0, 1, -7)$, принадлежащей плоскости $5x + y + z + 1$, равна:
1)3 , 2)1, 3)4, 4)2.
2. Нормальный вектор плоскости $x - 4y - 8z - 3 = 0$ имеет координаты

1) $(1,-4,-6)$ 2)$(1,-4,-3)$ 3)$(1,-4,8)$ 4)$(-4,-8,-3)$.

3. Соответствие между уравнением плоскости и её положением в пространстве

1) $2x+3z+5=0$, 2)$4y-z-3=0$,

3)$5x+2y-9=0$, 4)$x+2y-2z=0$

a) параллельна оси Оx

b) параллельна оси Оz

c) параллельна оси Оy

d) проходит через начало координат.

4. Расстояние от точки $A(1,2,-1)$ до плоскости $2x+3y+6z=0$ равно:

1)7, 2)$\frac{2}{49}$, 3)2, 4)$\frac{2}{7}$.

5. Соответствие между уравнением плоскостей и точками, которые лежат в этих плоскостях

1) $2x+y-3z+2=0$

2) $2y-z-3x=0$

3) $x+y-z=0$

4) $x+2y+z-4=0$

a) $(-1,0,0)$

b) $(0,0,0)$

c) $(1,1,0)$

d) $(1,1,1)$.

6. Уравнением плоскости в «отрезках» проходящей через точки $A(2,0,0)$, $B(0,0,1)$ и $C(0,3,0)$ является

1) $x+6y+2z-6=0$

2) $2x+3y+z=0$

3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$

4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,0,-1)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+5=0$, имеет вид:

1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$

2) $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{5}$

4) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z+1}{1}$

8. Даны уравнения плоскостей:

1) $2x-3y+z+3=0$

2) $x-2y+3=0$
3) $x+3y=0$.
Параллельными оси Oz являются
a) только 2) и 3)
b) только 3)
c) только 2)
d) ни одна
e) только 1).
9. Через точки $M_1(1,1,0)$, $M_2(1,0,1)$ и $M_3(-1,0,0)$ проходит плоскость…
10. Сумма координат центра эллипсоида $4(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=$ $=16$ равна…
11. Из плоскостей
1) $3x-2y+4=0$
2) $y+z+1=0$
3) $x-3y+z=0$
параллельны только оси Ox
a) только 2)
b) только 1)
c) ни одна
d) только 1)
e) только 3).
12. Из уравнений
1) $x+2y-4=0$
2) $y^2=4x-30$
3) $2x+3y+3z=0$ определяет плоскость
a) только 1) и 3)
b) только 1)
c) все
d) только 3)
e) ни одна.
13. Даны уравнения плоскостей
1) $2x+3y+z-1=0$
2) $x-3y+4z=0$
3) $y+z+2=0$.
Через начало координат проходят
a) только 2)
b) только 1) и 3)
c) только 2) и 3)

d) ни одна

e) все.

14. Центр сферы, заданной уравнением $(x+2)^2+(y-1)^2+$
$+(z-3)^2=4$

1) (−2,1,3)

2) (2,−1,−3)

3) (−2,−1,−3)

4) (2,−1,3).

15. Прямая $\frac{x-1}{a}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{5}$ параллельна плоскости $x-3y-5z=0$ при а равном…

1) 3,   2)−34, 3)−1,   4)34.

16. Соответствие между уравнениями поверхностей и их названиями

1) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$

2) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$

4) $2z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$

5) $2z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$

a) эллиптический гиперболоид

b) однополостный гиперболоид

c) эллипсоид

d) двуполостный гиперболоид

e) гиперболический параболоид.

17. Соответствие между уравнениями поверхностей и их названиями

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

3) $2x=y^2$

4) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1.$

a) круговой цилиндр

b) гиперболический цилиндр

c) эллиптический цилиндр

d) параболический цилиндр.

18. Направляющий вектор прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{x+4}{2}$$

1) (0,5,−4)
2) (0,−5,4)
3) (2,3,2)
4) нет верного ответа.

19. Прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$ проходит через точку
1) (1,1,1)
2) (0,2,2)
3) (0,−2,−1)
4) нет ответа.

20. Дана плоскость $x+z+5=0$. Параллелен плоскости вектор
1) (1,0,1)
2) (1,1,5)
3) (1,2,−1)
4) (1,1,1).

21. Соответствие между утверждениями относительно плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (1) ,
$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (2)0, прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и их признаками:
1) плоскости параллельны
2) плоскости перпендикулярны
3) плоскость (1) и прямая параллельны
4) плоскость (1) и прямая перпендикулярны
a) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
b) $\frac{A_1}{2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
c) $A_1m+B_1n+C_1p=0$
d) $\frac{A_1}{m}=\frac{B_1}{n}=\frac{C_1}{p}$.

22. Плоскости $2x-3y+z-4=0$ и $mx+6y+kz+5=0$ параллельны, если
1) $m=-4$, $k=2$
2) $m=-4$, $k=-2$
3) $m=2$, $k=-4$
4) $m=-2$, $k=-4$.

23. Угол между плоскостями $x+y-\sqrt{2}z+5=0$ и $x-y-\sqrt{2}z-3=0$ равен
1) $arccos\,\frac{1}{4}$, 2) $\frac{\pi}{3}$, 3) $\frac{\pi}{6}$, 4) $\frac{2}{3}\pi$.

24. Координаты точки пересечения прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ и плоскости

x+**y**+z−2=0 равны…

25. Угол между прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ и плоскостью x+y+z−2=0 равен

1) $arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, 2) $\pi - arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$, 3) $arcsin\ \frac{\sqrt{6}}{3}$, 4) нет ответа.

3.14. Задачи

3.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1,−2,3) и:

1) перпендикулярной вектору $\bar{n}=(3,4,5)$,

2) точку B(0,2,5) и параллельной оси Oy,

3) параллельной плоскости 3x−4y+5z+6=0,

4) проходящей через ось Oz.

3.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1) точки A(1,2,3), B(4,−1,−2) и C(4,0,3),

2) точки A(1,2,3), B(4,−1,−2) параллельно вектору $\bar{a}=(6,-8,10)$,

3) точку A(1,2,3) параллельно двум данным векторам $\bar{a}=(6,-8,10)$ и $\bar{b}=(4,-3,5)$.

3.39. Составить уравнение плоскости, которое проходит через точку A(−1,−1,2) перпендикулярно к двум плоскостям x−2y+z−4=0 и x+2y−2z+4=0.

3.40. Составить уравнение плоскости, которое проходит через точку A(3,5,−2) параллельно плоскости 5x−3y+2z−6=0.

3.41. Составить уравнение плоскости, которое проходит через точки A(1,4,−5) и B(4,2,−3) перпендикулярно к плоскости 3x+5y−6z−8=0.

3.42. Вычислить расстояние от точки M до заданной плоскости, если:

1) M (−1,2,1) и x−2y−2z−2=0,

2) M (5,6,4) и x+3y+4z−13=0.

3.43. Определить углы между заданными плоскостями:

1) 8x−2y−7z+2=0 и 7x+8y−11z+6=0,

2) x−2y+2z+1=0 и 3x+3y−3z−4=0.

3.44. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A(−1,1,−3) параллельно вектору $\bar{S}=(1,-3,4)$.

3.45. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M_1(2,−1,−1) и M_2(3,3,−1).

3.46. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A(1,−3,5) параллельно прямой $\begin{cases} x+3y-2z+3=0, \\ 3x-y+2z-7=0. \end{cases}$

3.47. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,-2,4)$ перпендикулярно плоскости $5x+3y-7z+0$.

3.48. Составить канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0. \end{cases}$$

3.49. Составить параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-y+z+1=0, \\ x+2y-z-6=0. \end{cases}$$

3.50. Составить канонические уравнения прямой, которая:

1) проходит через точку $A(1,-2,5)$ параллельно оси Ox,

2) проходит через точку $M(-3,2,1)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$,

3) проходит через точку $A(4,-5,6)$ параллельно прямой $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=3-2t, \\ z=5-4t, \end{cases}$

4) проходит через точку $A(3,-1,8)$ перпендикулярно плоскости $2x-2y+z-6=0$,

5) проходит через точки $M_1(2,-3,1)$ и $M_2(4,-2,6)$.

3.51. Определить острый угол между прямыми:

1) $\begin{cases} x=7t-2, \\ y=2t+3, \\ z=-8t+1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=11t-1, \\ y=-8t+4, \\ z=-7t+5, \end{cases}$

2) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-1}{\sqrt{2}}$

3.52. Вычислить угол между прямой и плоскостью:

1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ и $6x-9y-6z+10=0$,

2) $\begin{cases} x=5t+4, \\ y=3t-3, \\ z=-8t+1 \end{cases}$ и $2x-3y-6z-5=0$.

3.53. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и $2x+3y+z-1=0$,

2) $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=1-t$ и $3x-2y+z-3=0$.

3.54. Вычислить расстояние от точки $A(2,3,-1)$ до прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}= \ =\frac{z-13}{4}$.

3.55. Составить уравнение сферы, если:

1) она имеет центр $C(0,0,0)$ и радиус $R=9$,

2) она имеет центр $C(5,-3,7)$ и радиус $R=2$,

3) она проходит через начало координат и имеет центр $C(4,-4,-2)$,

4) она проходит через точку $A(2,-1,-3)$ и имеет центр $C(3,-2,1)$,

5) Центром сферы является начало координат, и плоскость $16x-15y-12z+75=0$ является касательной к сфере,

6) она имеет центр $C(3,-5,-2)$, и плоскости $2x-y-3z+11=0$ является касательной к сфере.

3.56. Определить координаты центра C и радиус R сферы:

1) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$,

2) $x^2+y^2+z^2-6z=0$,

3) $x^2+y^2+z^2+20y=0$.

3.57. Выяснить, какую поверхность определяют следующие уравнения:

1) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{6}=1$,

2) $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{12}=-1$,

3) $y^2-9=0$,

4) $2x^2+y^2=z$.

3.58. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

1) $x^2+y^2=4$,

2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{26}=1$,

3) $x^2-y^2=1$,

4) $y^2=2x$,

5) $z^2=y$,

6) $z+x^2=0$,

7) $x^2+y^2=2y$,

8) $x^2+y^2=0$,

9) $x^2-z^2=0$,

10) $y^2=xy$.

3.59. По какой линии пересекается конус $x^2-y^2+z^2=0$ с плоскостями:

1) $y=3$,

2) $z=1$,

3) $x=0$.

3.15. Ответы

3.37. 1) $3x+4y+5z-10=0$,

2) $2x+z-5=0$,

3) $3x-4y+5z-26=0$,
4) $2x+y=0$.
3.38. 1) $10x+15y-3z-31=0$,
2) $35x+30y+32-104=0$,
3) $5x-5y-7z+26=0$.
3.39. $2x+3y+4z-3=0$.
3.40. $5x-3y+2z+4=0$.
3.41. $2x+24y+21z+7=0$.
3.42. 1) $d=3$, 2) $d=\sqrt{26}$.
3.43. 1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 2) $\alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.
3.44. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}$.
3.45. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$.
3.46. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$.
3.47. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.
3.48. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-6}{10}=\frac{z}{7}$.
3.49. $\begin{cases} x=1-t, \\ y=2+3t. \\ z=-1+5t. \end{cases}$
3.50. 1)$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-5}{0}$,
2) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$,
3) $\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-6}{-4}$,
4) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{1}$,
5) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{5}$.
3.51. 1)$\alpha=\frac{\pi}{4}$, 2)$\alpha=\frac{\pi}{3}$
3.52. 1)$\alpha=\frac{\pi}{2}$, 2)$\alpha=\frac{\pi}{4}$.
3.53. 1)(2,–3,6) 2)(5,5,–2)
3.54. $d=6$.
3.55. 1)$x^2+y^2+z^2=81$,
2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$,
3) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$,
4) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$,
5) $x^2+y^2+z^2=9$,
6) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

3.56. 1) $C(2,1,-1)$, $R=5$,

2) $C(0,0,3)$, $R=3$,

3) $C(0,-10,0)$, $R=10$.

3.57. 1) однополостный гиперболоид вращения, который получается вращением гиперболы
$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1,$ лежащей в плоскости $Oxy,$ вокруг оси Oy,

2) гиперболический цилиндр, образующие которого параллельны оси OX, а направляющей является гипербола $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{12}=-1,$ лежащей в плоскости $Oyz,$

3) пара параллельных плоскостей $y=3$ и $y=-3$,

4) эллиптический параболоид с осью симметрии Oz.

3.58. 1) круговой цилиндр,

2) эллиптический цилиндр,

3) гиперболический цилиндр,

4) параболический цилиндр,

5) параболический цилиндр,

6) параболический цилиндр,

7) круговой цилиндр,

8) ось Oz $x=0$, $y=0$,

9) две биссектриальные плоскости: $x=z$ и $x=-z$,

10) две плоскости $y=0$ и $y=x$.

3.59. 1) $\begin{cases} x^2+z^2=9, \\ y=3 \end{cases}$ – окружность,

2) $\begin{cases} y^2-x^2=1 \\ z=1 \end{cases}$, – гипербола,

3) $\begin{cases} z^2-y^2=0, \\ x=0 \end{cases}$ – две прямые.

3.16. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия в пространстве»

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A,B,C, и найти вектор нормали к этой плоскости:

№ вар.	A	B	C
1	(1;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)
2	(2;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)
3	(3;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)

Окончание

№ вар.	*A*	*B*	*C*
4	(4;5;4)	(8;7;4)	(6;10;4)
5	(5;6;6)	(−2;8;2)	(6;8;9)
6	(6;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)
7	(7;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)
8	(8;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)
9	(9;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)
10	(10;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)
11	(1;1;1)	(1;0;2)	(1;2;0)
12	(1;2;0)	(4;3;5)	(7;2;1)
13	(1;3;−3)	(3;2;1)	(4;3;1)
14	(1;4;2)	(2;3;1)	(3;2;1)
15	(1;5;−1)	(3;4;1)	(4;2;1)
16	(1;6;−2)	(2;−1;−2)	(4;0;1)
17	(1;7;3)	(3;0;−1)	(5;1;−2)
18	(1;8;2)	(−1;3;2)	(−2;1;4)
19	(1;9;−5)	(−2;1;5)	(−1;2;8)
20	(2;0;1)	(4;−2;1)	(6;−1;1)
21	(2;4;−3)	(1;4;−3)	(3;5;1)
22	(3;0;1)	(6;0;1)	(7;2;3)
23	(−3;−4;5)	(−3;−4;5)	(−2;−1;3)
24	(5;−1;2)	(5;−1;2)	(2;3;0)
25	(1;−4;−3)	(1;−4;−3)	(3;−6;−4)
26	(0;3;5)	(0;3;5)	(−1;4;3)
27	(−4;5;0)	(−4;5;0)	(−3;0;−1)
28	(2;4;7)	(2;4;7)	(0;5;7)
29	(8;−3;2)	(8;−3;2)	(10;−1;6)
30	(−5;4;3)	(−5;4;3)	(−5;7;5)

2. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

№ вар.	Прямая	Плоскость
1	$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$	$2x-y+3z+4=0$

Продолжение

№ вар.	Прямая	Плоскость
2	$\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-10}{3}$	$x+y-z+7=0$
3	$\frac{x-6}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{-5}$	$2x+3y+z+10=0$
4	$\frac{x-7}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-8}{11}$	$3x+y+4z-5=0$
5	$\frac{x-9}{7}=\frac{y}{-6}=\frac{z-18}{18}$	$5x-3y-z+8=0$
6	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-11}{14}$	$x-2y+3z-7=0$
7	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-6}{6}$	$x+3y+4z-11=0$
8	$\frac{x-13}{12}=\frac{y-5}{10}=\frac{z-3}{6}$	$4x+2y-3z-3=0$
9	$\frac{x-7}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{8}$	$7x-2y+4z-8=0$
10	$\frac{x-4}{-8}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+9}{-19}$	$2x+3y-5z-4=0$
11	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+7}{-8}$	$x-2y+3z+10=0$
12	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+9}{-12}=\frac{z-15}{12}$	$2x+5y-6z+11=0$
13	$\frac{x+8}{2}=\frac{y-8}{4}=\frac{z+5}{-7}$	$x-3y+7z+8=0$
14	$\frac{x+6}{-7}=\frac{y-9}{11}=\frac{z+16}{-16}$	$2x-4y+9z-10=0$
15	$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-11}{7}$	$3x+5y-z-6=0$
16	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{13}=\frac{z+2}{-2}$	$3x-y+5z-25=0$
17	$\frac{x+3}{-7}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{-4}$	$2x-3y-z-15=0$
18	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-5}{3}$	$2x+2y+z+8=0$
19	$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+1}{-2}$	$x-4y-2z+3=0$

Окончание

№ вар.	Прямая	Плоскость
20	$\frac{x-5}{8}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{7}$	$3x-2y+4z+37=0$
21	$\frac{x}{-5}=\frac{y+4}{-9}=\frac{z-3}{5}$	$4x+3y-z-37=0$
22	$\frac{x-3}{10}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-4}{0}$	$3x-4y+2z+33=0$
23	$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{-10}$	$5x+2y+3z-39=0$
24	$\frac{x+5}{0}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-2}{-3}$	$x-5y-4z+40=0$
25	$\frac{x+7}{-6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$	$6x+y-2z-1=0$
26	$\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{9}=\frac{z+2}{-1}$	$7x+4y-3z+10=0$
27	$\frac{x-8}{7}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{4}$	$2x+6y-4z-2=0$
28	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-9}{7}=\frac{z+7}{-5}$	$8x-6y+2z+8=0$
29	$\frac{x-2}{8}=\frac{y+6}{-7}=\frac{z-8}{7}$	$2x-y+9z+4=0$
30	$\frac{x+7}{9}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{6}$	$9x+7y-6z-23=0$

3. Определить вид (название) поверхности:

№ вар.	1)	2)
1	$4x^2-y^2-16z^2+16=0$	$x^2+4z=0$
2	$3x^2+y^2+9z^2-9=0$	$x^2+2y^2-2z=0$
3	$-5x^2+10y^2-z^2+20=0$	$y^2+4z^2=5x^2$
4	$4x^2-8y^2+z^2+24=0$	$x^2-y=-9z^2$
5	$x^2-6y^2+z^2=0$	$7x^2-3y^2-z^2=21$
6	$z=8-x^2-4y^2$	$4x^2+9y^2+36z^2==72$
7	$4x^2+6y^2-24z^2=96$	$y^2+8z^2=30x^2$
8	$4x^2-5y^2-5z^2+40=0$	$y=5x^2+3z^2$
9	$x^2=8(y^2+z^2)$	$2x^2+3y^2-z^2=18$

Окончание

№ вар.	1)	2)
10	$5z^2 + 2y^2 = 10x$	$4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$
11	$x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$	$2y = x^2 + 4z^2$
12	$6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$	$8y^2 + 2z^2 = x$
13	$-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$	$6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$
14	$5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$	$x^2 + 3z = 0$
15	$6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$	$3x^2 + y^2 - 3z = 0$
16	$-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$	$y^2 + 2z^2 = 6x^2$
17	$-3x^2 + 6y^2 - z^2 + 18 = 0$	$x^2 - 2y = -z^2$
18	$4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$	$4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$
19	$z = 4 - x^2 - y^2$	$3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$
20	$4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$	$7y^2 + z^2 = 14x^2$
21	$9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$	$15y = 10x^2 + 6y^2$
22	$x^2 = 5(y^2 + z^2)$	$2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$
23	$4x^2 + 3y^2 = 12x$	$3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$
24	$8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$	$y - 4z^2 = 3x^2$
25	$x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$	$x - 3z^2 = 9y^2$
26	$2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$	$2x^2 + 3z = 0$
27	$7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$	$2x^2 + 4y^2 - 52 = 0$
28	$-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$	$2y^2 + 6z^2 = 3x$
29	$3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$	$z^2 - 2y = 4x^2$
30	$27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$	$3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$

3.17. Решение типового варианта

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ и $C(2,0,2)$, и найти вектор нормали к этой плоскости.

Решение.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

и составим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & 1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем :

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$ или $3x+3y+z-8=0$ – искомое уравнение плоскости; нормальный вектор $\bar{n}$ к плоскости имеет координаты: $\bar{n} = (3,3,1)$.

Ответ: $3x+3y+z-8=0$, $\bar{n} = (3,3,1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение.

Напишем параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости вместо x,y и z их выражения через параметр t, найдём значение t: $2(1+t)+3(-1-2t)+6t-1=0$ или $2t-2=0$, откуда $t=1$.

Подставим найденное значение t в уравнение прямой и найдём искомую точку M:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 6. \end{cases} \qquad \text{Имеем } M(2, -3,6)$$

Ответ: (2,–3,6).

3. Определить вид (название) поверхности:

$$1) -\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{y}{2}z^2 - 2 = 0,$$

$$2)\ 3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0\ .$$

Решение.

1) Приведём уравнение к каноническому виду. Для этого свободный член перенесём из левой части в правую с противоположным знаком, а затем обе части уравнения поделим на 2:

$$-\frac{x^2}{12}+2y^2+\frac{z^2}{4}=1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Полученное уравнение – уравнение однополостного гиперболоида.

2) Приведём данные уравнения к каноническому виду (поделим обе части уравнения на 3: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$. Полученное уравнение – уравнение конуса второго порядка.

Ответ: 1) $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1$ – однополостный гиперболоид,

2) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$ – конус второго порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения первых разделов математики, изучаемой в высшей школе студентами всех инженерно − технических и экономических специальностей; проиллюстрировать теорию примерами.

Автор надеется, что данное учебное пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

Предложенные контрольные вопросы и тесты позволят студентам проверить свои знания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анкилов, А. В. Высшая математика : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1 / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников; под общ. ред. П. А. Вельмисова. – 2-е изд. − Ульяновск : УлГТУ, 2011. − 250 с.
2. Бараненков, А. И. Сборник задач и типовых расчётов по высшей математике : учебное пособие / А. И. Бараненков, Е. П. Богомолова, И. М. Петрушко. – СПб. : Издательство «Лань», 2009. − 240 с.
3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. − М. : Физматлит, 2009. − 312 с.
4. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [М. И. Кремер и др.]; под ред. Н. Ш. Крамера. – 3-е изд. − М. : ЮНИТИ–Дана, 2008. – 479 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / (П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – 6-е изд. – М. : ООО «Издательство Оникс», ООО «Издательство «Мир и образование», 2006. – 304 с.
6. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1999.
7. Жуков, В. М. Практические задания по математике: теория, задания, ответы / В. М. Жуков. − Ростов н/Д : Феникс, 2012. – 704 с.
8. Красс, М. С. Математика для экономических специальностей : учебник / М. С. Красс. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2002. – 704 с.
9. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учебное пособие. – 9-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2007. – 240 с.
10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [в 2 ч.] Ч. 1 / Д. Письменный. – 10-е изд. − М. : Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
11. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : СПб. : Физматлит., 2001. – 384 с.
12. Шипачёв, В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С Шипачёв. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2002. – 479 с.
13. Шипачёв, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачёв. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2005. – 304 с.

Учебное электронное издание

ИЛЬЯЗОВА Дания Зарифовна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Учебное пособие

Редактор Н. А. Евдокимова

Усл. печ. л. 10,00.
Объем данных 1,43 Мб. ЭИ № 45.

Печатное издание

ЛР № 020640 от 22.10.97
Подписано в печать 28.12.2012. Формат 60 ×84 1/16.
Усл. печ. л. 10,00. Тираж 100 экз. Заказ 117.
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.
Тел.: (8422) 778-113.
E-mail: venec@ulstu.ru